VISOKA TEHNIČKA MAŠINSKA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA
TRSTENIK

dr Maja Krstić, mr Jelena Erić Obućina

ZBIRKA ZADATAKA ZA PRIPREMU PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

Trstenik, 2019.

Predgovor

Zbirka je namenjena budućim studentima Visoke Tehničke Mašinske škole strukovnih studija u Trsteniku, kako bi im olakšala polaganje predvidjenog prijemnog ispita iz Matematike.

Za svaku od oblasti predvidjenih programom prijemnog ispita iz Matematike dato je par rešenih zadataka propraćenih odgovarajućim objašnjenjima. Nakon toga je navedeno par primera mogućih kombinacija zadataka sa rezultatima.

Autori:

1. dr Maja Vasilova
2. mr Jelena Erić Obućina
3. dr Ljubinko Andrić

Glava 1

Zadaci za pripremu prijemnog ispita iz matematike

1. **Racionalni algebarski izrazi.** – Sredjivanje i izračunavanje algebarskih izraza. Polinomi i operacije sa njima. Procentni račun.

2. **Linearne jednačine i nejednačine.** – Linearne jednačine i nejednačine sa jednom nepoznatom. Sistem linearnih jednačina sa više nepoznatih. Primena linearnih nejednačina u rešavanju raznih problema.

3. **Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine.** – Kvadratna jednačina sa jednom nepoznatom i priroda rešenja. Vijetove formule. Jednačine koje se svode na kvadratne jednačine. Kvadratna funkcija. Kvadratna nejednačina. Iracionalne jednačine i nejednačine.

4. **Eksponencijalna funkcija. Eksponencijalne jednačine i nejednačine.** – Stepen, stepena funkcija i operacije sa stepenima. Eksponencijalne jednačine i nejednačine.

5. **Logaritamska funkcija. Logaritamske jednačine i nejednačine.** – Logaritam, logaritamska funkcija i operacije sa logaritmima. Logaritamske jednačine i nejednačine.

6. **Aritmetički i geometrijski nizovi.** – Formiranje članova, opšti član i zbir prvih n članova niza.

7. **Geometrija u ravni i prostoru.** – Vektor. Operacije sa vektorima. Primena vektora u geometriji. Podudarnost trouglova. Izometrijske transforacije. Homotetija i sličnost. Pitagorina teorema. Heronova formula za izracunavanje površine trougla. Primena u rešavanju konstrukcije trougla, četvorougla, poligona i kruga. Površina ravnih geometrijskih figura. Površina i zapremina prizme, piramide, zarubljene piramide, valjka, kupe, zarubljene kupe i lopte.

8. **Trigonometrija.** – Trigonometrijske funkcije. Trigonometrijske transformacije. Trigonometrijske jednačine i nejednačine. Sinusna i kosinusna teorema.Primena trigonometrije u rešavanje raznih problema iz geometrije.

9. **Analitička geometrija u ravni.** – Analitički oblik tačke i prave u ravni. Razni oblici prave. Krug. Elipsa. Hiperbola i parabola. Položaj prave prema konusnom preseku.

1. Racionalni algebarski izrazi

1. Izračunati vrednost izraza $\left(\frac{4}{9} : \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2. Izračunati vrednost izraza $\left[\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) : \left(13 + \frac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$.

3. Naći vrednost izraza $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. Pokazati da izraz $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ ima vrednost $\sqrt{3}$.

5. Pokazati da izraz $\left(\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{7}{5}}\right)$ ima vrednost $\sqrt{5}$.

6. Ako je $a = (2+\sqrt{3})^{-1}$ i $b = (2-\sqrt{3})^{-1}$, izračunati $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$.

7. Izračunati $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$.

8. Uprostiti izraze:

$$(a)\left(\frac{a^{-2}}{x^{-2}} - \frac{x^{-2}}{a^{-2}}\right) : \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{-1} - \left(\frac{x}{a}\right)^{-1}\right), (a \neq 0, x \neq 0),$$

$$(b)\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}} : \sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}, (x > 0).$$

9. Uprostiti izraz $\left(a^{-\frac{2}{3}} \cdot b \cdot (a^4 \cdot b^{-2})^{-\frac{1}{2}} \cdot (a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right)^3$, a zatim naći vrednost izraza za $a = \sqrt{2}$ i $b = \sqrt[3]{2}$.

10. Uprostiti izraze:

    (a) $\sqrt{x^3\sqrt[4]{\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}}$ $(x > 0)$; (b) $\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}-2}{1-x}$ $(x > 0, x \neq 1)$.

11. Pokazati da je polinom $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ deljiv binomom $x - 2$, a zatim naći njihov količnik.

12. Rešiti jednačinu $f(x+1) = -1$, ako je $f(x) = x^2 + 5x - 1$.

13. Naći najmanji zajednički sadržalac za polinome: $a^3 + b^3$, $2(a-b)^2$, $3(a^2 - b^2)$.

14. Odrediti najmanji zajednički sadržalac za polinome: $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 - xy^2$.

15. Naći najmanji zajednički sadržalac za polinome: $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$, $x^2 - 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$.

16. Uprostiti algebarski izraz $\frac{x^2-y^2}{x-y} - \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$, $x \neq y$, $(x,y) \neq (0,0)$.

17. Uprostiti izraz $\frac{xy-y^2}{x^2-xy} + \frac{x^2-y^2}{xy}$, $x \neq y, x \neq 0, y \neq 0$.

18. Uprostiti izraz $\left(\frac{1}{2a+b} - \frac{1}{4a^2+4ab+b^2}\right) : \left(\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{4a^2-b^2}\right)$, $b \neq \pm 2a$.

19. Uprostiti izraz $\frac{1}{a^2+ab} + \frac{2b}{a^3-ab^2} - \frac{a+b}{a^2b-ab^2}$, a zatim naći vrednost tog izraza za $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sqrt{3}$.

20. Uprostiti izraz $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{2a-5}{a-1}\right) : \frac{10}{a-1}$.

21. Masa nekog tela se smanjila sa $80kg$ na $64kg$. Za koliko procenata se smanjila masa tog tela?

22. Cena nekog proizvoda poskupela je za 30%, a zatim snižena za 20% i sada iznosi 1300 dinara. Kolika je bila cena tog proizvoda pre poskupljenja?

23. Izračunati 30% od izraza $\frac{\left(1\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{15}}{1\frac{1}{3}-1{,}2}$.

24. Ako je $A = \frac{\sqrt[3]{-0.008}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)}{5\frac{1}{3}:0.2} \cdot \log_{10} 1000$, koliko iznosi $0.8\%A$?

25. Roba je poskupela za 25%. Koliko bi trebala ta roba sada da pojeftini da bi njena cena bila ista kao pre poskupljenja?

Rešenja

1. $$\left(\frac{4}{9} : \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{27} + \frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8}$$

2. $$\left[\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) : \left(13 + \frac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}\right) : \frac{97}{7}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left[\left(\frac{3}{7} + \frac{10}{9}\right) \cdot \frac{7}{97}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{97}{63} \cdot \frac{7}{97}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

3. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4-3}=1$$

4. $\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2-\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}+4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}-(4-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{8+2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}}{4\sqrt{3}}=\frac{8+2\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}}{4\sqrt{3}}=\frac{8+2\sqrt{16-12}}{4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8+4}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

5. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}\right):\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

$$=(\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{5}):\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=(\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\sqrt{5}$$

6. $a=(2+\sqrt{3})^{-1}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$

$$b=(2-\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3},$$

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=(3+\sqrt{3})^{-1}+(3-\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}+3+\sqrt{3}}{3^2-\sqrt{3}^2}=\frac{6}{6}=1$$

7. $$\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}+\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$$
$$=\left(\frac{1-\sqrt{7}+1+\sqrt{7}}{1^2-\sqrt{7}^2}\right)^{-2}+\left(1+\sqrt{7}\right)^2+\left(1-\sqrt{7}\right)^2$$
$$=\left(\frac{2}{-6}\right)^{-2}+1+2\sqrt{7}+7+1-2\sqrt{7}+7=(-3)^2+16=25$$

8. (a) $$\left(\frac{a^{-2}}{x^{-2}}-\frac{x^{-2}}{a^{-2}}\right):\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}-\left(\frac{x}{a}\right)^{-1}\right)=\left(\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{x^2}}-\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{a^2}}\right):\left(\frac{1}{\frac{a}{x}}-\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)$$
$$=\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right):\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)=\frac{x^4-a^4}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{ax}$$
$$=\frac{(x^2)^2-(a^2)^2}{a^2x^2}:\frac{(x-a)(x+a)}{ax}=\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{a^2x^2}:\frac{(x-a)(x+a)}{ax}$$
$$=\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{a^2x^2}\cdot\frac{ax}{(x-a)(x+a)}=\frac{(x^2+a^2)}{ax},\ x\neq\pm a$$

(b) $$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}:\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3\cdot x}}:\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3\cdot x}}=\sqrt[12]{x^4}:\sqrt[15]{x^4}$$
$$=\sqrt[60]{(x^4)^5}:\sqrt[60]{(x^4)^4}=\sqrt[60]{x^{20}}:\sqrt[60]{x^{16}}=\sqrt[60]{x^{20}:x^{16}}=\sqrt[60]{x^4}=\sqrt[15]{x}$$

9. $$\left(a^{-\frac{2}{3}}\cdot b\cdot(a^4\cdot b^{-2})^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right)^3=\left(a^{-\frac{2}{3}}\cdot b\cdot a^{-2}\cdot b\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^3$$
$$=\left(a^{-2}\cdot b^2\right)^3=\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^3=\left(\frac{b}{a}\right)^6$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^6=\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^6=\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^6=\frac{2^2}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

10. (a) Način 1: Postupnim unošenjem pod znak korena, s obzirom na $x>0$, sledi

$$\sqrt{x^3\sqrt[4]{\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}}=\sqrt{\sqrt[4]{(x^3)^4\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}}=\sqrt[8]{x^{12}\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}=\sqrt[8]{x^{11}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}=\sqrt[8]{\sqrt[3]{(x^{11})^3\frac{1}{x}}}$$
$$=\sqrt[24]{x^{33}\frac{1}{x}}=\sqrt[24]{x^{32}}=\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{x^3x}=x\sqrt[3]{x}$$

Način 2: Pretvarajući postupno korene u stepene sa razlomljenim izložiocem, sledi

$$\sqrt{x^3\sqrt[4]{\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}} = \sqrt{x^3\sqrt[4]{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{x^3\sqrt[4]{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{3}}}} = \sqrt{x^3\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}}$$

$$= \sqrt{x^3\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{x^3\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}}} = \sqrt{x^3\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \sqrt{x^3\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{x^{3-\frac{1}{3}}} = \left(x^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x\cdot x^{\frac{1}{3}} = x\sqrt[3]{x}$$

$$(b)\quad \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}-2}{1-x} = \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}-(1-\sqrt{x})-(2\sqrt{x}-2)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}-1+\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{2}{1-x}$$

11. Polinom $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ je deljiv binomom $x-2$ ako je $x-2$ koreni faktor tog polinoma, odnosno ako je $x = 2$, prema Bezuovom stavu, nula polinoma $P(x)$. S obziom na $P(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 2 = 0$, polinom $P(x)$ je deljiv sa $x-2$. Količnik te deobe dobićemo koristeći Euklidov algoritam za deobu polinoma, tj:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 7x - 2) : (x-2) = x^2 - 3x + 1 \\
\pm x^3 \mp 2x^2 \\
-\;-\;-\;-\;- \\
\qquad -3x^2 + 7x - 2 \\
\qquad \mp 3x^2 \pm 6x \\
\qquad -\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- \\
\qquad\qquad\qquad x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \pm x \mp 2 \\
\qquad\qquad\quad -\;-\;-\;- \\
\qquad\qquad\qquad\; 0
\end{array}$$

12. Ako u funkciji $f(x) = x^2 + 5x - 1$ smenimo x sa $x+1$ dobićemo $f(x+1) = (x+1)^2 + 5(x+1) - 1 = x^2 + 7x + 5$. $f(x+1) = -1 \Longleftrightarrow x^2 + 7x + 5 = -1 \Longleftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0$. Koreni jednačine $x^2 + 7x + 6 = 0$ su $x_1 = -1$ i $x_2 = -6$, pa su to tražena rešenja jednačine $f(x+1) = -1$.

13. Da bismo imali najmanji zajednički sadržalac (NZS) za date izraze, svaki od tih izraza moramo rastaviti na proste činioce. Kako je

$$\begin{aligned}
&a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&2(a-b)^2 = 2(a-b)^2,\\
&3(a^2-b^2) = 3(a-b)(a+b),
\end{aligned}$$

onda je $NZS = 6(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

14. $$\begin{aligned}
&x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x^3 - x^2y) - (xy^2 - y^3) = x^2(x-y) - y^2(x-y)\\
&\quad = (x-y)(x^2-y^2) = (x-y)(x-y)(x+y) = (x-y)^2(x+y),\\
&x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2,\\
&x^3 - xy^2 = x(x^2-y^2) = x(x-y)(x+y),\\
&NZS = x(x-y)^2(x+y)^2.
\end{aligned}$$

15. Date izraze najpre rastavimo na proste činioce:

$$\begin{aligned}
&x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = x^2(x+y) - y^2(x+y) = (x+y)(x^2-y^2)\\
&\qquad\qquad = (x+y)(x-y)(x+y) = (x+y)^2(x-y),\\
&x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2,\\
&x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),\\
&NZS = (x+y)^2(x-y)^2
\end{aligned}$$

16. $x \neq y \neq 0 \Longrightarrow$ $$\begin{aligned}
&\frac{x^2-y^2}{x-y} - \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} - \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}\\
&= x + y - \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - (x^2+xy+y^2)}{x+y}\\
&= \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-xy-y^2}{x+y} = \frac{xy}{x+y}
\end{aligned}$$

17. $(x \neq 0 \land y \neq 0 \land x \neq y) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\frac{xy-y^2}{x^2-xy} + \frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{xy-y^2}{x(x-y)} + \frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{(xy-y^2)y + (x^2-y^2)(x-y)}{xy(x-y)}\\
&= \frac{xy^2 - y^3 + x^3 - x^2y - xy^2 + y^3}{xy(x-y)} = \frac{x^3-x^2y}{xy(x-y)} = \frac{x^2(x-y)}{xy(x-y)} = \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2a+b} - \frac{1}{4a^2+4ab+b^2}\right) : \left(\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{4a^2-b^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2a+b} - \frac{1}{(2a+b)^2}\right) : \left(\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{(2a)^2-b^2}\right)\\
&= \frac{2a+b-1}{(2a+b)^2} : \left(\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{(2a-b)(2a+b)}\right)\\
&= \frac{2a+b-1}{(2a+b)^2} : \frac{2a+b-1}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2a+b-1}{(2a+b)^2} \cdot \frac{(2a-b)(2a+b)}{2a+b-1} = \frac{2a-b}{2a+b},
\end{aligned}$$

uz uslov $2a+b-1\neq 0$ i $2a+b\neq 0$.

$$\begin{aligned}
19.\quad A(a,b) &= \frac{1}{a^2+ab}+\frac{2b}{a^3-ab^2}-\frac{a+b}{a^2b-ab^2}\\
&= \frac{1}{a(a+b)}+\frac{2b}{a(a^2-b^2)}-\frac{a+b}{ab(a-b)}\\
&= \frac{1}{a(a+b)}+\frac{2b}{a(a-b)(a+b)}-\frac{a+b}{ab(a-b)}\\
&= \frac{b(a-b)+2b^2-(a+b)^2}{ab(a-b)(a+b)}=\frac{b(a-b)+2b^2-(a+b)^2}{ab(a-b)(a+b)}\\
&= \frac{ab-b^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{ab(a-b)(a+b)}=\frac{-a^2-ab}{ab(a-b)(a+b)}\\
&= \frac{-a(a+b)}{ab(a-b)(a+b)}=\frac{-1}{b(a-b)}=\frac{1}{b(b-a)},\ (a\neq 0, b\neq -a).
\end{aligned}$$

Za $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $b=\sqrt{3}\Longrightarrow A(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
20.\quad &\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{2a-5}{a-1}\right):\frac{10}{a-1}\\
&=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)+\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)-(2a-5)}{a-1}\cdot\frac{a-1}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

21. Masa tela se smanjila za $80-64=16kg$, a to je $\frac{16}{80}\cdot 100\%=20\%$ prvobitne mase. Dakle, masa tela se smanjla za 20%.

22. Označimo sa x cenu proizvoda. Cena proizvoda posle poskupljenja od 30% iznosi $x+30\%x=x+\frac{30}{100}x=x\left(1+\frac{3}{10}\right)$. Ako sada, ovu cenu umanjimo za 20% dobićemo:

$$\begin{aligned}
x\left(1+\frac{3}{10}\right)-20\%x\left(1+\frac{3}{10}\right)&=x\left(1+\frac{3}{10}\right)-\frac{20}{100}x\left(1+\frac{3}{10}\right)\\
&=x\left(1+\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{13}{10}x=\frac{26}{25}x,
\end{aligned}$$

što iznosi 1300 dinara, tj. $\frac{26}{25}x=1300\Longrightarrow x=1300\cdot\frac{26}{25}=1250$.

Dakle, cena proizvoda pre poskupljenja iznosila je 1250 dinara.

$$23.\quad \frac{\left(1\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{15}}{1\frac{1}{3}-1,2}=\frac{\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{15}}{\frac{4}{3}-\frac{12}{10}}=\frac{\frac{18-10}{15}:\frac{2}{15}}{\frac{4}{3}-\frac{6}{5}}=\frac{\frac{8}{15}\cdot\frac{15}{2}}{\frac{20-18}{15}}=\frac{4}{\frac{2}{15}}=\frac{60}{2}=30$$

$$30\%\cdot 30=\frac{30}{100}=9$$

$$24.\quad A=\frac{\sqrt[3]{-0.008}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)}{5\frac{1}{3}:0.2}\cdot\log_{10}1000=\frac{\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}}\cdot\frac{5-8}{20}}{\frac{16}{3}:\frac{2}{10}}\cdot\log_{10}10^3$$

$$= \frac{\sqrt[3]{-\left(\frac{2}{10}\right)^3} \cdot \frac{-3}{20}}{\frac{16}{3} \cdot 5} \cdot 3 \log_{10} 10 = \frac{\left(-\frac{2}{10}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20}\right)}{\frac{80}{3}} \cdot 3 = \frac{27}{8000}$$

$$0.8\% A = \frac{0.8}{100} \cdot \frac{27}{8000} = \frac{8}{1000} \cdot \frac{27}{8000} = \frac{27}{1000000} = 27 \cdot 10^{-6}$$

25. Označimo sa x cenu proizvoda. Cena proizvoda posle poskupljenja od 25% iznosi $x + 25\%x = x + \frac{25}{100}x = x\left(1 + \frac{25}{100}\right) = \frac{125}{100}x = \frac{5}{4}x$. Cena robe pre poskupljenja sada predstavlja $\frac{x}{\frac{5}{4}x} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%$ cene robe nakon poskupljenja. To znači da sada roba treba da pojeftini za 20% da bi se vratila na početnu cenu.

2. Linearne jednačine i nejednačine

1. Odrediti zbir rešenja jednačine:

$$|x-2| + \frac{x+2}{3} - 4 = 0.$$

2. Bazen se puni dvema cevima za 6 časova. Jedna cev bi ga napunila za 5 časova manje od druge. Za koje vreme bi bazen napunila svaka cev posebno?

3. Odrediti vrednosti x za koje je

$$\frac{3x-1}{x-1} > 2.$$

4. Rešiti nejednačinu:

$$2|x+1| > x+4.$$

5. Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5a \\ x + y - z &= a \\ x - y + z &= 3a \end{aligned}$$

Rešenja

1. Razlikujemo dva slučaja: $|x-2| = x-2$, $x \geq 2$ i $|x-2| = 2-x$, $x < 2$. Kada je $x \geq 2$, jednačina postaje $x - 2 + \frac{x+2}{3} - 4 = 0$, a njeno rešenje je $x = 4$. Kada je $x < 2$, jednačina postaje $2 - x + \frac{x+2}{3} - 4 = 0$, a njeno rešenje je $x = -2$. Zbir rešenja jednačine biće $4 + (-2) = 2$.

2. Ako jedna cev napuni bazen za x časova, onda će druga cev napuniti bazen za $x + 5$ časova. Za jedan čas prva cev puni $\frac{1}{x}$ zapremine bazena, a druga cev puni $\frac{1}{x+5}$ zapremine bazena. Pošto se bazen puni za 6 časova kada ga pune obe

cevi zajedno, onda ce za jedan čas zajedničkog punjenja biti ispunjeno $\frac{1}{6}$, odnosno $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$ zapremine bazena, pa je

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} &\Longrightarrow 6(x+5)+6x=x(x+5)\\ &\Longrightarrow x^2-7x-30=0 \Longleftrightarrow (x=10 \vee x=-3).\end{aligned}$$

Negativno rešenje $x=-3$ se odbacuje, pa je $x=10$ časova vreme punjenja bazena jednom cevi, a $x+5=15$ časova vreme punjenja bazena drugom cevi.

3. $$\begin{aligned}\frac{3x-1}{x-1}>2 \Longleftrightarrow \frac{3x-1}{x-1}-2>0 \Longleftrightarrow \frac{3x-1-2(x-1)}{x-1}>0 \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x-1}>0\\ \Longleftrightarrow (x+1>0 \wedge x-1>0) \vee (x+1<0 \wedge x-1<0)\\ \Longleftrightarrow (x>-1 \wedge x>1) \vee (x<-1 \wedge x<1) \Longleftrightarrow (x>1) \vee (x<-1)\\ \Longleftrightarrow x \in (1,+\infty) \vee x \in (-\infty,-1) \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)\end{aligned}$$

4. Razlikujemo dva slučaja: $|x+1|=x+1$, $x \geq -1$ i $|x+1|=-x-1$, $x<-1$. Kada je $x \geq -1$, nejednačina postaje $2x+2>x+4 \Longrightarrow x>\frac{2}{3}$, kada je $x<-1$, nejednačina postaje $-2x-2>x+4 \Longrightarrow x<-2$. Dakle, skup rešenja nejednačine je $x \in (-\infty,-2)(\frac{2}{3},+\infty)$.

5. Način 1: Sabirajući prvu i drugu jednačinu, odnosno drugu i treću jednačinu, eliminisaćemo nepoznatu z i doći do sistema dve jednačine sa dve nepoznate, tj. sistema $2x+2y=6a \wedge 2x=4a$, odakle je $x=2a$ i $y=a$. Zamenjujući ove vednosti u jednu od jednačina dobijamo rešenje za $z=2a$.

Način 2: Sistem se može rešiti pomoću drterminanti. Determinanta sistema $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-4$ je različita od nule, pa je sistem saglasan za sve vrednosti parametra a. Determinante $\Delta_1=\begin{vmatrix}5a & 1 & 1\\ a & 1 & -1\\ 3a & -1 & 1\end{vmatrix}=-8a$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 5a & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & 3a & 1\end{vmatrix}=-4a$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 5a\\ 1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 3a\end{vmatrix}=-8a$ odgovaraju, redom, nepoznatim x, y, z, pa je rešenje sistema $x=\frac{-8a}{-4}=2a$, $y=\frac{-4a}{-4}=a$, $z=\frac{-8a}{-4}=2a$.

3. Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine

1. U kvadratnoj funkciji $y = -\frac{1}{2}x^2 + (m-2)x + \frac{m}{2}$ odrediti parametar m tako da za $x = 1$ funkcija dostigne maksimum. Za tako odredjenu vrednost parametra m nacrtati grafik date funkcije.

2. Odrediti interval u kome se kreće parametar k tako da jednačina $(k-2)x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ ima realne korene.

3. Odrediti za koje vrednosti realnog parametra r kvadratna jednačina $x^2 - 2\sqrt{2}x + r(r-1) = 0$ ima realne korene.

4. Odrediti interval u kome se kreće parametar r, tako da kvadratna jednačina $x^2 - 6x + 9^{r^2-1} = 0$ ima realne korene.

5. Odrediti parametar m tako da jednačina $mx^2 - 2(m+1)x - 4 = 0$ ima jednake korene.

6. U jednačini $kx^2 - 6(k-1)x + 4 = 0$ odrediti parametar k jedan njen koren bude dva puta veći od drugog.

7. Odrediti vrednost realnog parametra k, tako da koreni jednačine $x^2 - (k+4)x + 4k = 0$ predstavljaju vrednost dužina kateta pravouglog trougla kome je hipotenuza dužine $5cm$.

8. U jednačini $x^2 + px + q = 0$ odrediti parametre p i q da koreni jednačine budu p i q.

9. Ne rešavajući kvadratnu jednačinu $x^2 - (m+2)x + 2 = 0$ pokazati da je $x_1^2 + x_2^2 = m(m+4)$, gde su x_1 i x_2 koreni te jednačine, a m realan parametar.

10. Odrediti interval u kome se kreće realan parametar k tako da koreni x_1 i x_2 kvadratne jednačine $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ zadovoljavaju relaciju $x_1^2 + x_2^2 \leq 3$.

11. Rešiti jednačinu:
$$\frac{x^2}{ab-2b^2} = \frac{a-b}{a-2b} + \frac{x}{b}, \quad (a \neq 2b \neq 0).$$

12. Rešiti jednačinu
$$\frac{2x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = \frac{10a^2}{x^2-a^2}, \quad (x \neq \pm a).$$

13. Naći zbir svih realnih rešenja jednačine
$$x^2 - |x-2| - 4 = 0.$$

14. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x+1}{x-1} > \frac{1}{x+2}$$

.

15. Za koje će vrednosti x nejednačina biti zadovoljena

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+1} > 0?$$

16. Odrediti rešenje jednačine

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{x-1} = 2.$$

17. Koliko realnih rešenja ima jednačina

$$x + \sqrt{x-2} = 4?$$

18. Koliko ima celih brojeva x za koje važi nejednakost

$$x + 1 > \sqrt{5-x}?$$

19. Rešiti nejednačinu:

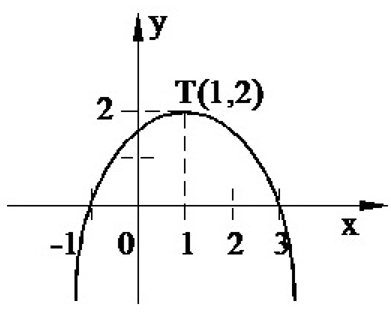
$$\sqrt{x^2-2} > 2.$$

20. Rešiti nejednačinu:

$$\sqrt{x+3} < x - 2.$$

Rešenja

1. Kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ dostiže maksimum u tački sa apscisom $x = -\frac{b}{2a}$ i taj maksimum iznosi $y_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a}$, pod uslovom da je koeficijen $a < 0$. U ovom primeru je $a = -\frac{1}{2} < 0$, $b = m-2$ i $c = \frac{m}{2}$, pa data funkcija ima maksimum u tački $x = 1 \Longleftrightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Longleftrightarrow -\frac{m-2}{2(-\frac{1}{2})} = 1 \Longleftrightarrow m - 2 = 1 \Longleftrightarrow m = 3$. Za $m = 3$



funkcija je predstavljena formulom $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$, čiji je grafik prikazan na slici.

2. Da bi kvadratna jednčina $(k-2)x^2-2kx+2k+3=0$ imala realne korene mora njena diskriminanta $D=4k^2-4(k-2)(2k+3)$ biti nenegativna, tj. $4k^2-4(k-2)(2k+3)\geq 0 \Longleftrightarrow k^2-(k-2)(2k+3)\geq 0 \Longleftrightarrow -k^2+k+6\geq 0 \Longleftrightarrow -2\leq k\leq 3 \Longleftrightarrow k\in[-2,3]$.

3. Kvadratna jednačina $x^2-2\sqrt{2}+r(r+1)=0$ će imati realne korene, ako je njena diskriminanta D pozitivna ili jednaka nuli, tj.:

$$\begin{aligned}
&D=(-2\sqrt{2})^2-4r(r-1)\geq 0 \Longleftrightarrow 8-4r(r-1)\geq 0 \Longleftrightarrow 2-r(r-1)\geq 0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow 2-r^2+r\geq 0 \Longleftrightarrow r^2-r-2\leq 0 \Longleftrightarrow (r-2)(r+1)\leq 0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (r-2\leq 0\wedge r+1\geq 0)\vee(r-2\geq 0\wedge r+1\leq 0) \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (r\leq 2\wedge r\geq -1)\vee(r\geq 2\wedge r\leq -1) \Longleftrightarrow (-1\leq 2)\vee r\in\emptyset \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow r\in[-1,2]\vee r\in\emptyset \Longleftrightarrow r\in[-1,2]
\end{aligned}$$

4. Da bi kvadratna jednačina $x^2-6x+9^{r^2-1}$ imala realne korene, mora njena diskriminanta biti nenegativna, tj. $D=b^2-4ac\geq 0$ gde je $a=1$, $b=-6$ i $c=9^{r^2-1}$.

$$\begin{aligned}
&D\geq 0 \Longleftrightarrow (-6)^2-4\cdot 9^{r^2-1}\geq 0 \Longleftrightarrow 36-4\cdot 9^{r^2-1}\geq 0 \Longleftrightarrow 9-9^{r^2-1}\geq 0\\
&\Longleftrightarrow 9^{r^2-1}\leq 9^1 \Longleftrightarrow r^2-1\leq 1 \Longleftrightarrow r^2-2\leq 0 \Longleftrightarrow r^2-(\sqrt{2})^2\leq 0\\
&\Longleftrightarrow (r-\sqrt{2})(r+\sqrt{2})\leq 0\\
&\Longleftrightarrow (r-\sqrt{2}\leq 0\wedge r+\sqrt{2}\geq 0)\vee(r-\sqrt{2}\geq 0\wedge r+\sqrt{2}\leq 0)\\
&\Longleftrightarrow (r\leq\sqrt{2}\wedge r\geq-\sqrt{2})\vee(r\geq\sqrt{2}\wedge r\leq-\sqrt{2})\\
&\Longleftrightarrow (-\sqrt{2}\leq r\leq\sqrt{2})\vee r\in\emptyset \Longleftrightarrow r\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\vee r\in\emptyset\\
&\Longleftrightarrow r\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup\emptyset \Longleftrightarrow r\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]
\end{aligned}$$

5. Da bi jednačina $mx^2-2(m+1)x-4=0$ imala jednake korene, mora njena diskriminanta $D=b^2-4ac$, gde je $a=m$, $b=-2(m+1)$ i $c=-4$, biti jednaka nuli, tj. $4(m+1)^2-16m=0 \Longleftrightarrow (m+1)^2-4m=0 \Longleftrightarrow m^2-2m+1=0 \Longleftrightarrow (m-1)^2=0 \Longrightarrow m=1$. Za $m=1$ jednačina glasi $x^2-4x+4=0 \Longleftrightarrow (x-2)^2=0$, odakle je $x_1=x_2=2$ što se i zahtevalo.

6. Koristeći Vijetova pravila za kvadratnu jednačinu $kx^2-6(k-1)x+4=0$, sledi $x_1+x_2=\frac{6(k-1)}{k}$, $x_1\cdot x_2=\frac{4}{k}$. S obzirom nza uslov $x_1=2x_2$, dobija se $3x_2=\frac{6(k-1)}{k}\wedge 2x_2^2=\frac{4}{k}$, odnosno, $x_2=\frac{2(k-1)}{k}\wedge x_2^2=\frac{2}{k}$, odakle je

$$\left(\frac{2(k-1)}{k}\right)^2=\frac{2}{k} \Longleftrightarrow \frac{4(k-1)^2}{k^2}=\frac{2}{k} \Longleftrightarrow 4(k-1)^2 2k \Longleftrightarrow 4k^2-10k+4=0$$
$$\Longleftrightarrow k=2\vee k=\frac{1}{2}.$$

7. Primenjujući Vijetova pravila za korene kvadratne jednačine $x^2-(k+4)x+4k=0$ sledi $x_1+x_2=k+4\wedge x_1x_2=4k$. S druge strane, x_1 i x_2 su merni brojevi kateta pravouglog trougla, čija je hipotenuza dužine $5cm$, pa je $x_1^2+x_2^2=25 \Longleftrightarrow$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25 \Longleftrightarrow (k+4)^2-8k=25 \Longleftrightarrow k^2+8k+16-8k=25 \Longleftrightarrow k^2=9 \Longleftrightarrow k=3 \vee k=-3.$

Za $k=3 \Longrightarrow x^2-7x+12=0 \Longrightarrow x=4 \vee x=3$. Za $k=-3 \Longrightarrow x^2-x-12=0 \Longrightarrow x=4 \vee x=-3$ ne zadovoljava uslov jer kateta ne može imati negativnu vrednost.

8. Označimo sa $x_1=p$ i $x_2=q$ korene kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$. Koristeći Vijetova pravila, sledi

$$x_1+x_2=-p \Longleftrightarrow p+q=-p \Longleftrightarrow 2p+q=0$$

$$x_1x_2=q \Longleftrightarrow pq=q \Longleftrightarrow q(p-1)=0 \Longleftrightarrow (q=0 \vee p-1=0)$$

(1) za $q=0 \Longrightarrow 2p+q=0 \Longrightarrow p=0$, pa jednačina ima dvostruki koren $x_1=x_2=0$
(2) za $p-1=0 \Longrightarrow p=1 \wedge 2p+q=0 \wedge q=-2$
Prema tome, $(p,q) \in \{(0,0),(1,-2)\}$.

9. Vijetova pravila za kvadratnu jednačinu $ax^2+bx+c=0$ glase: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$, gde su x_1 i x_2 koreni te jednačine. Iz jednačine $x^2-(m+2)x+2=0$ je $a=1$, $b=-(m+2)$ i $c=2$, pa je $x_1+x_2=m+2$ i $x_1 \cdot x_2=2$. Tada je $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+2)^2-4=m^2+4m+4-4=m^2+4m=m(m+4)$, što je trebalo pokazati.

10. Koristeći Vijetova pravila $x_1+x_2=\frac{k}{2}$ i $x_1 \cdot x_2=\frac{k-3}{2}$ za kvadratnu jednačinu $2x^2-kx+k-3=0$ sledi

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 \le 3 \Longleftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \le 3 \Longleftrightarrow \left(\frac{k}{2}\right)^2-2\cdot\frac{k-3}{2} \le 3 \\ \Longleftrightarrow \frac{k^2}{4}-(k-3) \le 3 \Longleftrightarrow k^2-4(k-3) \le 12 \Longleftrightarrow k^2-4k \le 0 \\ \Longleftrightarrow k(k-4) \le 0 \Longleftrightarrow (k \le 0 \wedge k-4 \ge 0) \vee (k \ge 0 \wedge k-4 \le 0) \\ \Longleftrightarrow (k \le 0 \wedge k \ge 4) \vee (k \ge 0 \wedge k \le 4) \Longleftrightarrow 0 \le k \le 4 \\ \Longleftrightarrow k \in [0,4]. \end{aligned}$$

11. $$\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{a-2b}+\frac{x}{b} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{b(a-2b)}=\frac{a-b}{a-2b}+\frac{x}{b}$$

$$\Longleftrightarrow a \neq 2b \neq 0 \wedge x^2=b(a-b)+x(a-2b)$$

$$\Longleftrightarrow x^2-(a-2b)x-b(a-b)=0,$$

odakle je $x_{1,2}=\frac{(a-2b)\pm\sqrt{(a-2b)^2+4b(a-b)}}{2}=\frac{(a-2b)\pm a}{2}$, odnosno $x_1=a-b$ i $x_2=-b$.

12. $$x \neq \pm a \Longrightarrow \frac{2x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=\frac{10a^2}{x^2-a^2} \Longleftrightarrow \frac{2x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=\frac{10a^2}{(x-a)(x+a)}$$
$$\Longleftrightarrow 2x(x-a)+x(x+a)=10a^2 \Longleftrightarrow 2x^2-2ax+x^2+ax=10a^2$$

$$\Longleftrightarrow 3x^2 - ax - 10a^2 = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 120a^2}}{6} = \frac{a \pm 11a}{6}$$
$$\Longrightarrow x_1 = 2a \wedge x_2 = -\frac{5}{3}a$$

13. Razlikujemo dva slučaja. Kada je $x-2 \geq 0$, tj. $x \geq 2$, onda je $|x-2| = x-2$, pa imamo jednačinu $x^2 - (x-2) - 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, čija su rešenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Kako mora da važi $x \geq 2$, prvo rešenje jednačine se odbacuje, tj. u ovom slučaju imamo samo jedno rešenje $x = 2$.

Drugi slučaj je kada važi $x - 2 < 0$, tj. $x < 2$. Tada $|x-2| = 2 - x$, pa imamo jednačinu $x^2 - (2-x) - 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$. Kako mora da važi $x < 2$, u ovom slučaju imamo samo jedno rešenje $x = -3$.

Zbir kvadrata rešenja je $2^2 + (-3)^2 = 13$.

14. $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{1}{x+2} \Longleftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+2)} > 0$

Kako je $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$ za svaku vrednost x, sledi

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+2)} > 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+2) > 0$$
$$\Longleftrightarrow (x - 1 > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (x - 1 < 0 \wedge x + 2 < 0)$$
$$\Longleftrightarrow (x > 1 \wedge x > -2) \vee (x < 1 \wedge x < -2) \Longleftrightarrow x > 1 \vee x < -2$$
$$\Longleftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

15. Grafik funkcije $y = (x-1)(x-2)$ predstavlja parabolu, koja seče Ox osu u tačkama $x = 1$ i $x = 2$ i otvorom je okrenuta na gornju stranu, pa je za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ funkcija $y = (x-1)(x-2)$ pozitivna, a za $x \in (1, 2)$ negativna.

Grafik funkcije $y = x + 1$ predstavlja pravu liniju, koja seče Ox osu u tački $x = -1$ i ima pozitivan koeficijent pravca, pa je funkcija $y = x + 1$ pozitivna za $x \in (-1, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, -1)$.

Količnik datih funkcija je pozitivan za $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$, a negativan za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$, pa je $\frac{(x-1)(x-2)}{x+1} > 0$ za $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$, što predstavlja rešenje nejednačine.

16. Najpre odredjujemo oblast definisanosti jednačine. Dakle, mora da važi $5x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{5} \wedge x \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq 1$. Sada rešavamo jednačinu: $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x-1} = 2 \ /^2 \Longleftrightarrow 5x - 1 + 2\sqrt{(5x-1)(x-1)} + x - 1 = 4 \Longleftrightarrow \sqrt{(5x-1)(x-1)} = 3 - 3x$. Dalje, mora da važi $3 - 3x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1$. Zajedno sa prethodnim uslovom $x \geq 1$ to daje $x = 1$ kao jedino moguće rešenje. Kako važi $\sqrt{5 \cdot 1 - 1} + \sqrt{1-1} = \sqrt{4} = 2$, sledi da $x = 1$ jeste rešenje polazne jednačine.

17. Za jednačinu $x + \sqrt{x-2} = 4 \Longleftrightarrow \sqrt{x-2} = 4 - x$ mora da važi $x - 2 \geq 0$ $\wedge\ 4 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2 \wedge x \leq 4 \Longleftrightarrow 2 \leq x \leq 4$. Kvadriranjem jednačine dobija

se $x-2=16-8x+x^2 \iff x^2-9x+18=0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $x_1=3$ i $x_2=6$. Kako drugo rešenje ne pripada oblasti definisanosti, polazna iracionalna jednačina ima samo jedno realno rešenje $x=3$.

18. Za nejednačinu $x+1>\sqrt{5-x}$ mora da važi $x+1\geq 0 \wedge 5-x\geq 0 \iff x\geq -1\wedge x\leq 5 \iff -1\leq x\leq 5$. Kvadriranjem nejednačine dobija se $x^2+2x+1>5-x \iff x^2+3x-4>0$. Rešenja ove kvadratne nejednačine pripadaju skupu $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$. Dakle, $-1\leq x\leq 5\wedge x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty) \Longrightarrow x\in(1,5]$, pa postoji četiri cela broja koji zadovoljavaju nejednakost, a to su 2, 3, 4 i 5.

19. Za nejednačinu $\sqrt{x^2-2}>2$ mora da važi $x^2-2\geq 0 \iff x^2\geq 2 \iff x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. Kvadriranjem nejednačine dobija se $x^2-2>4 \iff x^2>6$. Rešenja ove kvadratne nejednačine pripadaju skupu $x\in(-\infty,-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},+\infty)$, a kako je $-\sqrt{6}<\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}<\sqrt{6}$, to ovaj skup predstavlja rešenje polazne iracionalne nejednačine.

20. Za nejednačinu $\sqrt{x+3}<x-2$ mora da važi $x+3\geq 0\wedge x-2>0 \iff x\geq -3\wedge x>2 \iff x>2$. Kvadriranjem nejednačine dobija se $x+3<x^2-4x+4 \iff x^2-5x+1>0$. Rešenja ove kvadratne nejednačine pripadaju skupu $x\in(-\infty,\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},+\infty)$. Dakle, $x>2\wedge x\in(-\infty,\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},+\infty) \Longrightarrow x\in(\frac{3+\sqrt{21}}{2},+\infty)$, što predstavlja skup rešenja iracionalne nejednačine.

4. Eksponencijalna funkcija. Eksponencijalne jednačine i nejednačine

1. Rešiti jednačinu:
$$2\cdot 3^{x+2}+27\cdot 3^{x-2}=189.$$

2. Izračunati proizvod svih rešenja jednačine:
$$2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-1}+4=0.$$

3. Rešiti jednačinu:
$$9^x=3^{\frac{x+1}{x}}.$$

4. Rešiti jednačinu:
$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

5. Rešiti jednačinu:
$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$$

6. Rešiti jednačinu:
$$3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$$

7. Rešiti jednačinu:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

8. Rešiti nejednačinu:

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0.$$

9. Rešiti nejednačinu:

$$3^x + 3^{-x+1} - 4 < 0.$$

10. Rešiti nejednačinu:

$$2^{\frac{x+1}{2}} \geq 0.5^{\frac{1-4x}{7}}.$$

Rešenja

1. $$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{x-2} = 189 &\Longleftrightarrow 2 \cdot 3^4 \cdot 3^{x-2} + 27 \cdot 3^{x-2} = 189 \\ &\Longleftrightarrow 3^{x-2}(162+27) = 189 \Longleftrightarrow 3^{x-2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow 3^{x-2} = 3^0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

2. $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0 \Longleftrightarrow 2^3 \cdot 2^{2x-2} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$
Uvodjenjem smene $2^{x-1} = t$ dobija se kvadratna jednačina $8t^2 - 33t + 4 = 0$ čija su rešenja $t_1 = 4 = 2^2$ i $t_2 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$. Sledi da je $2^{x-1} = 2^2$ i $2^{x-1} = 2^{-3}$, tj, $x - 1 = 2$ i $x - 1 = -3$, pa su $x = 3$ i $x = -2$ rešenja polazne jednačine, a njihov proizvod je -6.

3. Za $x \neq 0$ je $9^x = 3^{\frac{x+1}{x}} \Longleftrightarrow (3^2)^x = 3^{\frac{x+1}{x}} \Longleftrightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{x+1}{x}}$, odakle je $2x = \frac{x+1}{x}$, jer jednaki stepeni moraju imati iste izložioce. Jednačina $2x = \frac{x+1}{x} \Longleftrightarrow 2x^2 = x + 1 \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$ ima dva rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{2}$, što su istovremeno i rešenja polazne eksponencijalne jednačine.

4. $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}} \Longleftrightarrow (2^2)^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot (2^3)^{x^2+\frac{x}{3}} \Longleftrightarrow \left(2^{3x^2+x}\right)^2 - 8 = 2 \cdot 2^{3x^2+x}$ Smenom $2^{3x^2+x} = t$ dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 2t - 8 = 0$, čiji su koreni $t_1 = 4$ i $t_2 = -2$. Za $t_1 = 4 \Longrightarrow 2^{3x^2+x} = 4 \Longleftrightarrow 2^{3x^2+x} = 2^2 \Longleftrightarrow 3x^2 + x = 2$, odakle je $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{2}{3}$. Za $t_2 = -2 \Longrightarrow 2^{3x^2+x} = -2$ jednačina nema rešenje, jer je $2^{3x^2+x} > 0$. Dakle, tražena rešenja su $x \in \{1, -2\}$.

5. $$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} &\Longleftrightarrow 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 4^{x-\frac{1}{2}} \\ &\Longleftrightarrow 4^x + 4^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ &\Longleftrightarrow 4^{x-\frac{1}{2}}(4^{\frac{1}{2}} + 1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3^1 + 1) \\ &\Longleftrightarrow 3 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \\ &\Longleftrightarrow x - \frac{1}{2} = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

6. $3 \cdot 4^x + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$

$$\iff 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 9^x = 6 \cdot 4 \cdot 4^x - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9^x$$

$$\iff 3 \cdot 4^x + 27 \cdot 9^x = 24 \cdot 4^x - \frac{9}{2} \cdot 9^x \iff \frac{63}{2} \cdot 9^x = 21 \cdot 4^x$$

$$\iff \frac{3}{2} = \left(\frac{4}{9}\right)^x \iff \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \iff -1 = 2x$$

$$\iff x = -\frac{1}{2}$$

7. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x \iff 3 \cdot (2^4)^x + 2 \cdot (3^4)^x = 5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^x$

$$\iff 3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 2^{2x} 3^{2x}$$

Ako podelimo celu jednačinu sa 3^{4x}, dobićemo $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$. Uvodjenjem smene $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $3t^2 - 5t + 2 = 0$ čija su rešenja $t_1 = \frac{2}{3}$ i $t_2 = 1$. Iz $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$ sledi $2x = 1$, tj. $x = \frac{1}{2}$, a iz $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ sledi $x = 0$.

8. Ako uvedemo smenu $5^x = t$ dobijamo kvadratnu nejednačinu $t^2 - 6t + 5 < 0$ čije je rešenje $t \in (1, 5)$. Odatle sledi $5^x \in (1, 5)$. Kako je $5^x = 1 = 5^0 \iff x = 0$ i $5^x = 5 = 5^1 \iff x = 1$, to je rešenje početne eksponencijalne nejednačine $x \in (0, 1)$.

9. Nejednačinu $3^x + 3^{-x+1} - 4 < 0$ pomnožimo sa 3^x ($3^x > 0$ za svako x) i dobijamo $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$. Uvodjenjem smene $3^x = t$, svodimo je na kvadratnu nejednačinu $t^2 - 4t + 3 < 0$čije je rešenje $t \in (1, 3)$. Sledi $3^x \in (1, 3)$. Kako je $3^x = 1 = 3^0 \Longrightarrow x = 0$ i $3^x = 3 = 3^1 \Longrightarrow x = 1$, to je $x \in (0, 1)$ rešenje polazne nejednačine.

10. $2^{\frac{x+1}{2}} \geq 0.5^{\frac{1-4x}{7}} \iff 2^{\frac{x+1}{2}} \geq (2^{-1})^{\frac{1-4x}{7}} \iff 2^{\frac{x+1}{2}} \geq 2^{-\frac{1-4x}{7}}$

$$\iff \frac{x+1}{2} \geq -\frac{1-4x}{7} \iff 7(x+1) \geq 2(4x-1)$$

$$\iff x \leq 9$$

5. Logaritamska funkcija. Logaritamske jednačine i nejednačine

1. Bez upotrebe tablica naći vrednost izraza $\frac{\log_2 3}{\log_{12} 2} + \frac{2 - \log_2 3}{\log_{48} 2}$.

2. Bez upotrebe tablica naći vrednost izraza $\log_{\sqrt{2}} 64 + \log_{\sqrt[3]{3}} 81$.

3. Ako je $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$, izračunati $\log_{45} 100$.

4. Rešiti jednačinu:

$$9^{\log_3 x} = 7x - 12.$$

5. Rešiti jednačinu:
$$\log_2 x + 2\log_x 2 - 3 = 0.$$

6. Rešiti jednačinu:
$$\log_2^2 x - 6\log_{16} x = 1.$$

7. Rešiti jednačinu:
$$\log_5(24 + 5^{1-x}) = x + 1.$$

8. Rešiti jednačinu:
$$\log_4 x + 9\log_{x^2} 2 = 5, \quad x > 0.$$

9. Rešiti nejednačinu:
$$\log_2 \frac{x+6}{x+1} > 1.$$

10. Rešiti nejednačinu:
$$\log_{x-2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0.$$

Rešenja

1. Koristeći jednakost $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$, sledi

$$\begin{aligned}
&\frac{\log_2 3}{\log_{12} 2} + \frac{2 - \log_2 3}{\log_{48} 2} = \log_2 3 \cdot \log_2 12 + (2 - \log_2 3) \cdot \log_2 48\\
&= \log_2 3 \cdot \log_2(2^2 \cdot 3) + (2 - \log_2 3) \cdot \log_2(2^4 \cdot 3)\\
&= \log_2 3 \cdot (\log_2 2^2 + \log_2 3) + (2 - \log_2 3)(\log_2 2^4 + \log_2 3)\\
&= \log_2 3 \cdot (2 + \log_2 3) + (2 - \log_2 3)(4 + \log_2 3)\\
&= 2\log_2 3 + \log_2^2 3 + 8 + 2\log_2 3 - 4\log_2 3 - \log_2^2 3 = 8
\end{aligned}$$

2. Koristeći osobinu $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, sledi

$$\begin{aligned}
\log_{\sqrt{2}} 64 + \log_{\sqrt[3]{3}} 81 &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 + \log_{3^{\frac{1}{3}}} 81 = 2\log_2 64 + 3\log_3 81\\
&= 2\log_2 2^6 + 3\log_3 3^4 = 12\log_2 2 + 12\log_3 3 = 24.
\end{aligned}$$

3. Koristeći osobine logaritama dobija se

$$\begin{aligned}
\log_{45} 100 &= \log_{45}(2^2 \cdot 5^2) = 2\log_{45} 2 + 2\log_{45} 5 = \frac{2}{\log_2 45} + \frac{2}{\log_5 45}\\
&= \frac{2}{\log_2(3^2 \cdot 5)} + \frac{2}{\log_5(3^2 \cdot 5)} = \frac{2}{2\log_2 3 + \log_2 5} + \frac{2}{2\log_5 3 + \log_5 5}\\
&= \frac{2}{2\frac{\log_5 3}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_5 2}} + \frac{2}{2\log_5 3 + 1} = \frac{2}{\frac{2b+1}{a}} + \frac{2}{2b+1} = \frac{2(a+1)}{2b+1}
\end{aligned}$$

4. $9^{\log_3 x} = 7x - 12 \iff (3^2)^{\log_3 x} = 7x - 12 \iff 3^{2\log_3 x} = 7x - 12$
$\iff 3^{\log_3 x^2} = 7x - 12 \iff x^2 = 7x - 12 \iff x^2 - 7x + 12 = 0$
$\iff x = 4 \lor x = 3$

Ovde smo koristili osobinu $a^{\log_a A} = A$, gde je $a = 3$ i $A = x^2$ koja sledi iz definicije logaritma.

5. Koristeći osobinu $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ koja važi za logaritme, sledi $\log_2 x + 2\log_x 2 - 3 = 0 \iff \log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} - 3 = 0 \iff \log_2^2 x + 2 - 3\log_2 x = 0$. Ako uvedemo smenu $\log_2 x = t$, dobićemo kvadratnu jednačinu $t^2 - 3t + 2 = 0$, čiji su koreni $t_1 = 2$ i $t_2 = 1$. Jedno rešenje dobija se iz jednakosti $\log_2 x = t_1 \iff \log_2 x = 2 \iff x = 2^2 \iff x = 4$, dok se drugo rešenje dobija iz jednakosti $\log_2 x = t_2 \iff \log_2 x = 1 \iff x = 2^1 \iff x = 2$. Rešenje: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, odnosno $x \in \{2, 4\}$.

6. Koristeći identičnost $\log_{s^n} x = \frac{1}{n}\log_s x$, sledi

$$\log_2^2 x - 6\log_{16} x = 1 \iff \log_2^2 x - 6\log_{2^4} x = 1 \iff \log_2^2 x - 6 \cdot \frac{1}{4}\log_2 x = 1$$
$$\iff \log_2^2 x - \frac{3}{2}\log_2 x = 1 \iff 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0.$$

Smenom $\log_2 = t$ dobija se kvadratna jednačina $2t^2 - 3t - 2 = 0$ čiji su koreni $t_1 = 2$ i $t_2 = -\frac{1}{2}$. Iz $\log_2 x = t_1 \iff \log_2 x = 2 \iff x = 2^2 \implies x = 4$, odnosno $\log_2 x = t_2 \iff \log_2 x = -\frac{1}{2} \iff x = 2^{-\frac{1}{2}} \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pa su rešenja date jednačine $x_1 = 4$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. $\log_5(24 + 5^{1-x}) = x + 1 \iff 24 + 5^{1-x} = 5^{x+1}$
Ako se jednačina pomnoži sa 5^x dobija se $24 \cdot 5^x + 5 = 5^{2x+1} \iff 5 \cdot 5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 5 = 0$. Uvodjenjem smene $5^x = t$, jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu $5t^2 - 24t - 5 = 0$ čija su rešenja $t_1 = 5$ i $t_2 = -\frac{1}{5}$. Kako je $5^x > 0$ za svako x, polazna jednačina ima rešenje samo za $5^x = 5$, a rešenje je $x = 1$.

8. S obzirom na $\log_4 x = \log_{2^2} x = \frac{1}{2}\log_2 x$ i $\log_{x^2} 2 = \frac{1}{2}\log_x 2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\log_2 x}$, sledi $\log_4 x + 9\log_{x^2} 2 = 5 \iff \frac{1}{2}\log_2 x + 9\frac{1}{2\log_2 x} = 5$. Uvodeći smenu $\log_2 x = t$, pod pretpostavkom da je $x \neq 1$, tj. $t \neq 0$, dobijamo kvadratnu jednačinu $\frac{t}{2} + \frac{9}{2t} = 5 \iff t^2 - 10t + 9 = 0$ čija su rešenja $t_1 = 9$ i $t_2 = 1$, odakle je $x_1 = 2^{t_1} = 2^9 = 512$ i $x_2 = 2^{t_2} = 2^1 = 2$, tj. tražena rešenja su $x_1 = 512$ i $x_2 = 2$.

9. Podsetimo se da je logaritamska funkcija $y = \log_a x$ definisana za $x > 0$. Ako je logaritamska osnova $a > 1$ logaritamska funkcija je rastuća, pa većem x odgovara veći logaritam. Imajući sve to u vidu, sledi:

$$\frac{x+6}{x+1} > 0 \land \log_2 \frac{x+6}{x+1} > 1 \iff \frac{x+6}{x+1} > 0 \land \frac{x+6}{x+1} > 2 \iff \frac{x+6}{x+1} > 2 \iff$$
$$\iff \frac{x+6}{x+1} - 2 > 0 \iff \frac{x+6-2(x+1)}{x+1} > 0 \iff \frac{-x+4}{x+1} > 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow (-x+4>0 \wedge x+1>0) \vee (-x+4<0 \wedge x+1<0)$$
$$\Longleftrightarrow (x<4 \wedge x>-1) \vee (x>4 \wedge x<-1)$$
$$\Longleftrightarrow (-1 \leq x \leq 4) \vee x \in \emptyset \Longleftrightarrow x \in (-1,4) \vee x \in \emptyset$$
$$\Longleftrightarrow x \in (-1,4),$$

pa je $x \in (-1,4)$ rešenje logaritamske nejednačine.

10. Slučaj 1:

$$0 < x-2 < 1 \wedge \log_{x-2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow (0<x-2<1) \wedge \left(0 < x - \frac{3}{2} \leq 1\right)$$
$$\Longleftrightarrow (2<x<3) \wedge \left(\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}\right) \Longleftrightarrow x \in (2,3) \wedge x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$
$$\Longleftrightarrow x \in (2,3) \cap \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \Longleftrightarrow x \in \left(2, \frac{5}{2}\right]$$

Slučaj 2:

$$x-2>1 \wedge \log_{x-2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow x-2>1 \wedge x-\frac{3}{2} \geq 1 \Longleftrightarrow x>3 \wedge x \geq \frac{5}{2}$$
$$\Longleftrightarrow x \in (3,+\infty) \wedge x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \Longleftrightarrow x \in (3,+\infty) \cap \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \Longleftrightarrow x \in (3,+\infty)$$

Objedinjujući rešenja za oba slučaja dobijamo rešenje date nejednačine $x \in \left(2, \frac{5}{2}\right] \cup (3,+\infty)$.

6. Aritmetički i geometrijski nizovi

1. Odrediti zbir prvih deset članova aritmetičke progresije, ako je $a_3 + a_5 = 16$ i $a_7 - a_4 = 6$.
2. Odrediti aritmetički niz kod koga je zbir osmog i trinaestog člana 86, a zbir prvih deset članova 230.
3. Zbir prvih n članova aritmetičke progresije je n^2. Odrediti članove te progresije, ako je prvi član jednak jedinici.
4. Prvi član aritmetičkog niza je 25, a suma prvih n članova je 2745. Ako je zbir trećeg i osmog člana tog niza 185, naći n.
5. Zbir prvih pet članova opadajućeg aritmetičkog niza je -30, a proizvod prvog i četvrtog člana tog niza je -20. Odrediti taj niz.
6. Dužine stranica pravouglog trougla čine aritmetičku progresiju. Odrediti vrednost dužina tih stranica, ako je obim trougla $24cm$.

7. Širina, dužina i visina pravouglog paralelopipeda čine aritmetičku progresiju. Naći površinu paralelopipeda ako je zbir svih njegovih ivica $240cm$, a zapremina $80cm^3$.

8. Četvrti član geometrijskog niza veći je od drugog za 24, a zbir drugog i trećeg člana je 6. Izračunati sumu prvih pet članova te progresije.

9. Koliko članova ima geometrijski niz, ako je zbir prvog i petog člana 51, zbir drugog i šestog člana 102, a zbir svih članova niza 3069?

10. Ivice pravog paralelopipeda, kome je povrsina $P = 252cm^2$ i zapremina $V = 216cm^3$, čine geometrijsku progresiju. Izračunati dužinu dijagonale paralelopipeda.

Rešenja

1. Koristeći obrasce $a_n = a_1 + (n-1)d$ za opšti član aritmetičke progresije i $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ za zbir prvih n članova te progresije, imaćemo: $a_3 + a_5 = 16 \wedge a_7 - a_4 = 6 \iff a_1 + 2d + a_1 + 4d = 16 \wedge a_1 + 6d - a_1 - 3d = 6 \iff 2a_1 + 6d = 16 \wedge 3d = 6 \iff a_1 + 3d = 8 \wedge d = 2 \iff a_1 = 2 \wedge d = 2$.

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)d) = \frac{10}{2}(2 \cdot 2 + 9 \cdot 2) = 5 \cdot 22 = 110.$$

2. Koristeći se fomulama za opšti član $a_n = a_1 + (n-1)d$ i zbir $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ aritmetičkog niza dobija se

$$a_8 + a_{13} = 86 \iff a_1 + 7d + a_1 + 12d = 86 \iff 2a_1 + 19d = 86 \quad (1.1)$$
$$S_{10} = 230 \iff S_{10} = 5(2a_1 + 9d) \iff 2a_1 + 9d = 46 \quad (1.2)$$

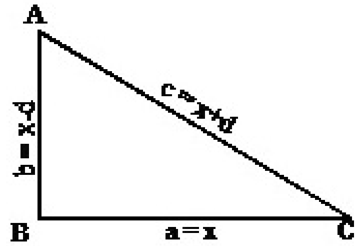
Rešavajući sistem jednačina (1.1) i (1.2) dobija se $a_1 = 5$ i $d = 4$, pa je traženi niz $5, 9, 13, 17, \ldots$

3. $a_1 = 1$, $S_n = n^2$, $n \in N$. Opšti član aritmetičkog niza je $a_n = a_1 + (n-1)d \iff a_n = 1 + (n-1)d$. Iz $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ sledi $\frac{n}{2}(2 + (n-1)d) = n^2 \iff 2 + (n-1)d = 2n \iff d = \frac{2n-2}{n-1} \iff d = 2$, pa je $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-3, 2n-1$ prvih n članova tražene aritmetičke progresije.

4. Kako je $a_1 = 25$ iz uslova $a_3 + a_8 = 185$ sledi $2a_1 + 9d = 185 \iff 50 + 9d = 185$, pa je $d = 15$. S duge strane, kako važi $S_n = 2745$, imamo $\frac{n}{2}(50 + (n-1) \cdot 15) = 2745 \iff n(15n + 35) = 5490 \iff 15n^2 + 35n - 5490 \Longrightarrow n_1 = 18 \vee n_2 = -\frac{61}{3}$. Kako broj članova niza mora da bude ceo i pozitivan, to je $n = 18$.

5. Kako je $S_5 = -30$ sledi $\frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = -30 \iff a_1 + 2d = -6 \Longrightarrow a_1 = -6 - 2d$. Zatim važi $a_1 \cdot a_4 = -20 \iff a_1(a_1 + 3d) = -20 \iff (-6 - 2d)(-6 + d) = -20 \iff 2d^2 - 6d - 56 \Longrightarrow d_1 = -4 \wedge d_2 = 7$. Kako je u pitanju opadajući niz, to d mora da bude negativno, pa je $d = -4$. Dalje je $a_1 = -6 - 2(-4)$, tj. $a_1 = 2$.

6. Merni brojevi $a = x$, $b = x - d$ i $c = x + d$, redom, stranica BC, AC



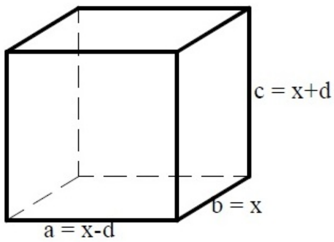
i AB pravouglog trougla ABC, čine aritmetički niz sa razlikom (diferencijom) d. Primenom Pitagorine teoreme sledi:

$$a^2+b^2=c^2 \Longleftrightarrow x^2+(x-d)^2=(x+d)^2 \Longleftrightarrow x^2+x^2-2xd+d^2=x^2+2xd+d^2$$
$$\Longleftrightarrow x^2-4xd=0 \Longleftrightarrow x(x-4d)=0 \Longrightarrow x-4d=0 \Longrightarrow x=4d,$$

jer rešenje $x=0$ ne može biti merni broj katete.

S druge strane, $a+b+c=24 \Longleftrightarrow x+(x-d)+(x+d)=24 \Longleftrightarrow 3x=24 \Longleftrightarrow x=8$, pa je $4d=8 \Longrightarrow d=2$. Dakle, $a=8cm$, $b=6cm$ i $c=10cm$ su merni brojevi stranica pravouglog trougla.

7. Dužine ivica $a=x-d$, $b=x$ i $c=x+d$ paralelopipeda čine aritmetičku progresiju sa razlikom d. Iz zbira svih ivica paralelopipeda dobija se jednačina



$4a+4b+4c=240 \Longleftrightarrow x=20$. S druge strane, iz zapremine $V=abc=80$ dobija se druga jednačina $x(x-d)(x+d)=80 \Longleftrightarrow x(x^2-d^2)=80 \Longleftrightarrow 20(20^2-d^2)=80 \Longleftrightarrow 400-d^2=4 \Longleftrightarrow d^2=396 \Longrightarrow d=6\sqrt{11}$, pa je $a=(20-6\sqrt{11})cm$, $b=20cm$ i $c=(20+6\sqrt{11})cm$.

Površina paralelopipeda je $P=2(ab+ac+bc)=2((20-6\sqrt{11})\cdot 20+(20-6\sqrt{11})(20+6\sqrt{11})+20\cdot(20+6\sqrt{11}))=2(400-120\sqrt{11}+400-(6\sqrt{11})^2+400+120\sqrt{11})=2(1200-396)=2\cdot 804=1608cm^2$.

8. $a_4-a_2=a_1q^3-a_1q=a_1q(q^2-1)=a_1q(q+1)(q-1)$

$$\Longleftrightarrow a_1q(q+1)(q-1)=24 \tag{1.3}$$

$$a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=a_1q(1+q) \Longleftrightarrow a_1q(q+1)=6 \tag{1.4}$$

Deljenjem jednačine (1.3) sa (1.4) dobija se $6(q-1)=24$, tj. $q=5$. Zatim iz (1.4) sledi $a_1\cdot 5\cdot(5+1)=6$, tj. $a_1=\frac{1}{5}$. Suma prvih pet članova niza je $S_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{781}{5}$.

9. $$a_1+a_5=a_1+a_1q^4=a_1(1+q^4) \Longleftrightarrow a_1(1+q^4)=51 \tag{1.5}$$

$$a_2+a_6=a_1q+a_1q^5=a_1q(1+q^4) \Longleftrightarrow a_1q(1+q^4)=102 \tag{1.6}$$

Deljenjem jednačine (1.6) sa (1.5) dobija se $q=2$. Zatim iz (1.5) sledi $a_1(1+2^4)=51$, tj. $a_1=3$. Iz uslova $S_n=3069$ sledi $3069=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{3(2^n-1)}{2-1}\Longleftrightarrow 1024=2^n$, pa je $n=10$.

10. Ako su $AB=a$, $BC=b$ i $CG=c$ ivice paalelopipeda $ABCDEFGH$, onda dijagonala paralelopipeda $AG=D$ ima vrednost $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Ako je prvi član geometrijske progresije, koji obrazuju ivice a, b i c, ivica a, a q količnik te progresije, tada je $b=aq$ i $c=aq^2$.

$$P=2(ab+ac+bc)\Longleftrightarrow 252=2(a^2q+a^2q^2+a^2q^3)\Longleftrightarrow a^2q+a^2q^2+a^2q^3=126$$
$$\Longleftrightarrow a^2q(1+q+q^2)=126 \tag{1.7}$$
$$V=abc\Longleftrightarrow 216=a^3q^3\Longleftrightarrow (ab)^3=6^3\Longleftrightarrow aq=6 \tag{1.8}$$

Rešavajući sistem jednačina (1.7) i (1.8) dobija se jedno rešenje $a=3$ i $q=2$, odakle je $b=6$ i $c=12$, odnosno drugo, simetrično rešenje $a=12$ i $q=\frac{1}{2}$, pa je $b=6$ i $c=3$. U oba slučaja dijagonala paralelopipeda iznosi

$$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3^2+6^2+12^2}=3\sqrt{21}cm.$$

7. Geometrija u ravni i prostoru

1. Katete pravouglog trougla ABC su $AC=15cm$ i $BC=20cm$. Kolika je visina koja odgovara hipotenuzi AC?

2. Odrediti katete a i b pravouglog trougla, ako je hipotenuza $c=2\sqrt{5}$, a izmedju uglova α i β postoji relacija $\sin\alpha=2\sin\beta$.

3. Odrediti poluprečnike opisanog i upisanog kruga oko trougla čije su stranice $b=10cm$, $c=26cm$ i $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

4. Pravougli trougao ima jednu katetu dužine $12cm$ i poluprečnik upisanog kruga dužine $2cm$. Izračunati dužine druge katete i hipotenuze.

5. Dat je pravougli trougao sa katetama $a=14\sqrt{5}cm$ i $b=7\sqrt{5}cm$. Teme pravog ugla trougla je centar kruga koji dodiruje hipotenuzu. Odrediti koliko procenata površine trougla pripada krugu.

6. U jednakokrakom trouglu onovice $a=18cm$ i krakova $b=15cm$ upisan je pravougaonik, tako da jedna stranica pravougaonika leži na osnovici trougla. Odrediti dužine stranica pravougaonika ako je njegova površina $P=48cm^2$.

7. Visina trapeza je $6cm$, a površina $96cm^2$. Osnovice trapeza se razlikuju za $4cm$. Kolike su dužine osnovica?

8. Prostorna dijagonala kvadra iznosi $12cm$ i sa ravni osnove zaklapa ugao od 30^o. Dijagonala osnove kvadra zaklapa ugao od 60^o sa jednom od osnovnih ivica. Naći površinu i zapreminu kvadra.

9. Osnova prave trostrane prizme je jednakokraki trougao osnovice $a = 10cm$ i visine (trougla) jednake visini prizme. Izračunati površinu prizme ako je njena zapremina $V = 720cm^3$.

10. Osnova piramide je pravougaonik sa stranicama $a = 12cm$ i $b = 9cm$. Izračunati zapreminu piramide, ako je njena bočna ivica $c = 12,5cm$.

11. Kod pravilne šestostrane prizme je a osnovna ivica i H visina. Naći površinu prizme ako je $a : H = 1 : 2$ i zapremina je $24\sqrt{3}$.

12. Kod pravilne šestostrane piramide osnovna ivica je $10cm$, a bočna ivica $13cm$. Naći površinu i zapreminu piramide.

13. Izvodnica kupe je $10cm$, a površina kupe $96\pi cm^2$. Naći površinu omotača i zapreminu kupe.

14. Izračunati zapreminu kupe čija je površina 90π, a izvodnica je za 3 duža od prečnika osnove.

15. Osni presek prave kružne kupe je jednakokraki trougao sa uglom pri vrhu od 120^o. Odrediti površinu i zapreminu kupe ako je njena izvodnica $s = 2\sqrt{3}$.

16. Izračunati površinu i zapreminu prave zarubljene kupe, ako je poluprečnik veće osnove $R = 7cm$, visina $H = 12cm$, a zbir dužina izvodnice (s) i poluprečnika manje osnove (r) iznosi $15cm$.

17. Visine dva valjka jednakih osnova odnose se kao $1 : 3$. Zapremina prvog valjka je $36\pi cm^2$. Kolika je zapremina drugog valjka?

18. Površina omotača pravog kružnog valjka je 50π, a poluprečnik osnove je $r = 5$. Izračunati zapreminu tog valjka.

19. U prav valjak poluprečnika osnove $2m$ i visine $\sqrt{3}m$ upisana je pravilna šestostrana prizma, tako da osnove prizme pripadaju osnovama valjka. Naći zapreminu te prizme.

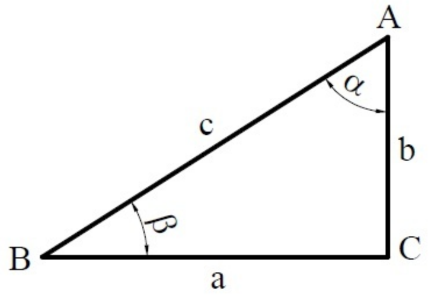
20. Ako se poluprečnik lopte poveća za $1cm$, njena površina se poveća za $8\pi cm^2$. Za koliko se poveća njena zapremina?

Rešenja

1. Po Pitagorinoj teoremi je $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Longleftrightarrow AB^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, odakle je $AB = 25cm$. Površina trougla je $P = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h}{2}$, gde je h visina koja odgovara hipotenuzi AB. Sledi da je $AC \cdot BC = AB \cdot h \Longleftrightarrow h = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{15 \cdot 20}{25}$, tj. $h = 12cm$.

2. Primenjujući sinusnu teoremu na trougao ABC, sledi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Longleftrightarrow \frac{a}{2\sin\beta} = \frac{b}{\sin\beta} \Longleftrightarrow \frac{a}{2} = b \Longleftrightarrow a = 2b. \tag{1.9}$$



S druge strane,

$$a^2 + b^2 = c^2 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 20, \tag{1.10}$$

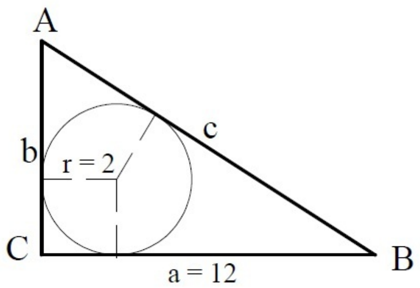
pa iz (1.9) i (1.10) sledi $a = 4$ i $b = 2$.

3. Primenom kosinusne teoreme na trougao čije su stranice a, $b = 10$, $c = 26$ i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, dobija se $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Longleftrightarrow a^2 = 100 + 676 - 200 \Longleftrightarrow a^2 = 576 \Longrightarrow a = 24cm$. Poluobim trougla je $s = \frac{a+b+c}{2} = 30cm$, pa je površina trougla $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{30 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 4} = 120cm^2$. Poluprečnik opisanog kruga oko trougla je $R = \frac{abc}{4P} = \frac{24 \cdot 10 \cdot 26}{4 \cdot 120} = 13cm$, a poluprečnik upisanog kruga $r = \frac{P}{s} = \frac{120}{30} = 4cm$.

4. Iz Pitagorine teoreme za pravougli trougao ABC (na slici), uzimajući da je $a = 12$, dolazimo do jednačine

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longleftrightarrow c^2 = 144 + b^2 \tag{1.11}$$

Površina trougla ABC je $P = \frac{ab}{2} = 6b$, osnosno $P = s \cdot r$, gde je $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+b+c}{2}$



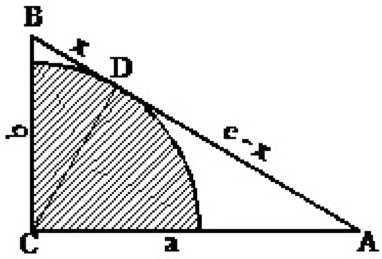
poluobim trougla ABC i $r = 2$ poluprečnik upisanog kruga trougla ABC, što dovodi do jednačine

$$6b = \frac{12+b+c}{2} \cdot 2 \Longleftrightarrow 6b = 12 + b + c \Longleftrightarrow c = 5b - 12 \tag{1.12}$$

Iz (1.11) i (1.12) dobija se $b = 5cm$ i $c = 13cm$.

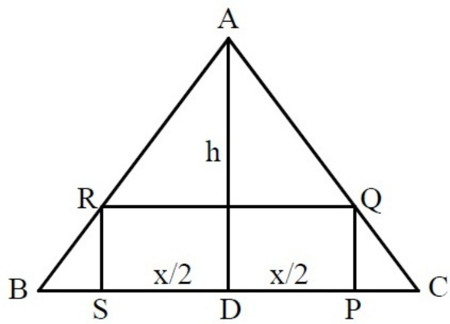
5. $AC = a = 14\sqrt{5}cm$, $BC = b = 7\sqrt{5}cm$. Hipotenuzina visina $CD = R$ pravouglog trougla ABC je geometrijska sredina odsečaka $BD = x$ i $AD = c - x$ na hipotenuzi pa je $R^2 = x(c-x)$, gde je $c = AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(14\sqrt{5})^2 + (7\sqrt{5})^2} \Longrightarrow$

$c = 35cm$. Iz pravouglog trougla BCD je $R^2 = b^2 - x^2 \iff R^2 = (7\sqrt{5})^2 - x^2 \iff R^2 = 245 - x^2$. Rešavanjem sistema jednačina $R^2 = x(35-x) \wedge R^2 = 245 - x^2$ dobija se $R = 14cm$ i $x = 7cm$. Površina P_1 dela kruga koji pripada trouglu ABC iznosi $P_1 = \frac{R^2\pi}{4} = \frac{14^2}{4} \cdot \frac{22}{7} = 154cm^2$. Površina P_2 trougla ABC je $P_2 = \frac{ab}{2} = \frac{14\sqrt{5}\cdot 7\sqrt{5}}{2} = 245cm^2$. Procenat površine P_1 u odnosu na površinu P_2 iznosi $\frac{P_1}{P_2} \cdot 100 = \frac{154}{245} \cdot 100 \approx 62,86\%$.



Napomena: Poluprečnik R se može izračunati iz površine P_2 trougla ABC, tj. $P_2 = \frac{Rc}{2} = \frac{ab}{2} \Longrightarrow R = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 14cm$.

6. Neka je ABC jednakokraki trougao dužine stranica $BC = a = 18cm$ i $AB = AC = b = 15cm$, a $PQRS$ pravougaonik upisan u trouglu ABC, prikazan na slici. Označimo sa $SP = RQ = x$ i $PQ = SR = y$ dužine stranica pravougaonika $PQRS$,



a sa $AD = h$ dužinu visine trougla ABC, koja odgovara stranici $BC = a$. Tada je $h^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2 \iff h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Longrightarrow h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12cm$, odnosno $PC = BS = \frac{a-x}{2} = \frac{18-x}{2}$. Iz sličnosti trouglova PQC i DAC sledi

$$PC : DC = PQ : DA \iff \frac{18-x}{2} : \frac{1}{2} = y : h \iff (18-x) : 18 = y : 12$$
$$\iff 2x + 3y = 36. \tag{1.13}$$

Površina pravougaonika $OQRS$ data je jednačinom

$$P = xy \iff 48 = xy. \tag{1.14}$$

Rešavajući sistem jednačina (1.13) i (1.14) dobija se $x_1 = 12$ i $y_1 = 4$, odnosno $x_2 = 6$ i $y_2 = 8$. Dakle, postoje dva pravougaonika čije su stranice dužine $12cm$ i $4cm$, odnosno $6cm$ i $8cm$, koji zadovoljavaju postavljeni uslov.

7. Površina $96cm^2$ trapeza, čija je duža osnovica a i kraća osnovica b i visina $h = 6cm$, izražava se formulom $P = \frac{a+b}{2} \cdot h \iff 96 = \frac{a+b}{2} \cdot 6 \iff a + b = 32$. S obzirom na $a - b = 4$, rešavanjem sistema jednačina $a + b = 32 \wedge a - b = 4$, dobija se $a = 18cm$ i $b = 14cm$.

8. $AG = 12cm$, $\sphericalangle CAG = 30^o$, $\sphericalangle BAC = 60^o$

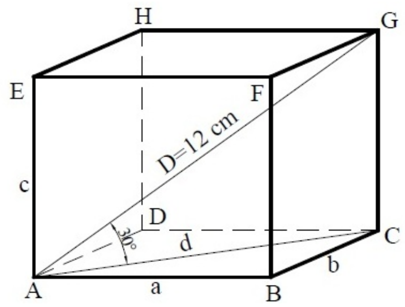
$D = AG = 12cm$ - dijagonala kvadra

$d = \frac{D\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}cm$ - visina jednakostraničnog trougla stranice $D = 12cm$

$c = CG = \frac{D}{2} = 6cm$

$b = \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 9cm$ - visina jednakostraničnog trougla stranice $d = 6\sqrt{3}cm$

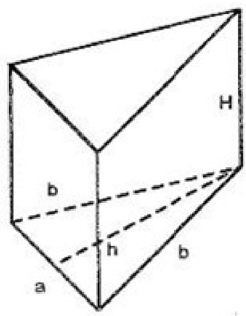
$a = \frac{d}{2} = 3\sqrt{3}cm$



$P = 2(ab + ac + bc) = 2(3\sqrt{3} \cdot 9 + 3\sqrt{3} \cdot 6 + 9 \cdot 6) = 18(5\sqrt{3} + 6)cm^2$

$V = a \cdot b \cdot c = 3\sqrt{3} \cdot 9 \cdot 6 = 162\sqrt{3}cm^3$

9. $a = 10cm$, $H = h$, $V = 720cm^3$;



$V = B \cdot H \iff V = \frac{ah}{2}H \iff 720 = 5h^2 \iff h^2 = 144 \implies h = H = 12cm$

$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \implies b^2 = 25 + 144 \implies b^2 = 169 \implies b = 13cm$

Površina P prizme iznosi $P = 2B + M = 2\frac{ah}{2} + (a + 2b)H = 2(a + b)h = 2(10 + 13) \cdot 12 = 552cm^2$, tj. $P = 552cm^2$.

10. $AB = DC = a = 12cm$, $AD = BC = b = 9cm$, $SA = SB = SC = SD = c = 12,5cm$

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 9^2} = \frac{\sqrt{(144+81)}}{2} = \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{15}{2} = 7,5cm$

Iz $\triangle AOS$ sledi $SO^2 = SA^2 - AO^2 \iff H^2 = c^2 - 7,5^2 \iff H^2 = 12,5^2 - 7,5^2 \iff H = \sqrt{12,5^2 - 7,5^2} \iff H = \sqrt{156,25 - 56,25} = \sqrt{100} = 10 \Longrightarrow H = 10cm$.

$V = \frac{1}{3}a \cdot b \cdot H = \frac{1}{3}12 \cdot 9 \cdot 10 = 360 \Longrightarrow V = 360cm^2$

11. Iz $a : H = 1 : 2$ sledi $H = 2a$. Dalje je $V = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot H = 3a^3\sqrt{3} \iff 24\sqrt{3} = 3a^3\sqrt{3}$. Odatle je $a = 2$ i $H = 4$. Površina prizme je $P = 2 \cdot \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6aH = 12\sqrt{3} + 48 = 12(\sqrt{3} + 4)$.

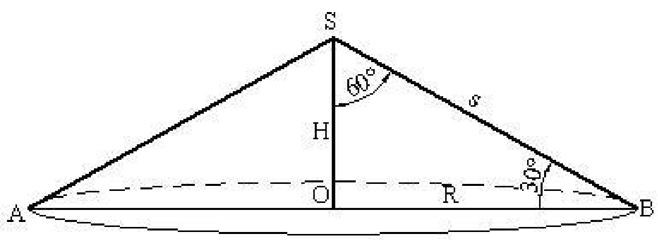
12. Poluprečnik opisane kružnice oko šestougla je jednak ivici a, tj. $r_o = 10cm$. Visina piramide je $H = \sqrt{s^2 - r_o^2} = \sqrt{13^2 - 10^2} \iff H = \sqrt{69}cm$, pa je zapremina piramide $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 10^2\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{69} = 50\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 23}$, tj. $V = 150\sqrt{23}cm^3$. Poluprečnik upisane kružnice u šestougao je $r_u = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tj. $r_u = 5\sqrt{3}cm$, pa je visina bočne strane $h_s = \sqrt{H^2 + r_u^2} = \sqrt{\sqrt{69}^2 + (5\sqrt{3})^2}$, tj. $h_s = 12cm$. Površina piramide je $P = B + M = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6\frac{ah_s}{2} = \frac{3 \cdot 10^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 10 \cdot 12$, tj. $P = (150\sqrt{3} + 360)cm^2$.

13. Kako je $s = 10cm$ i $P = 96\pi cm^2$, sledi $P = r^2\pi + r\pi s \iff 96 = r^2 + 10r \iff r^2 + 10r - 96 = 0 \Longrightarrow r = 6cm$, pa je površina omotača $M = r\pi s = 60\pi cm^2$. Visina kupe je $H = \sqrt{s^2 - r^2} = 8cm$, pa je zapremina kupe jednaka $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = 96\pi cm^3$.

14. Kako je $P = 90\pi$ i $s = 2r + 3$, sledi $P = r^2\pi + r\pi s \iff 90 = r^2 + r(2r + 3) \iff 3r^2 + 3r - 90 = 0 \Longrightarrow r = 5$, pa je izvodnica $s = 13$. Visina kupe je $H = \sqrt{s^2 - r^2} = 12$, odakle sledi da je zapremina kupe jednaka $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = 100\pi$.

15. Osni presek kupe je trougao ABS. Iz trougla SOB je $H = OS = \frac{SB}{2} = \frac{s}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ visina kupe.

$R = OB = \frac{SB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3$ - poluprečnik osnove kupe



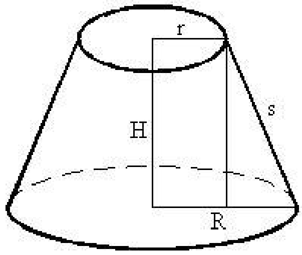
Površina kupe je $P = R^2\pi + R\pi s = R\pi(R + s) = 3\pi(3 + 2\sqrt{3})$.

Zapremina kupe je $V = \frac{R^2\pi H}{3} = \frac{9\pi\sqrt{3}}{3} = 3\pi\sqrt{3}$.

16. $R = 7cm$, $H = 12cm$

$$(R - r)^2 = s^2 - H^2 \wedge r + s = 15 \iff (7 - r)^2 = s^2 - 144 \wedge r + s = 15$$
$$\iff r^2 - 14r - s^2 + 193 = 0 \wedge r + s = 15 \quad (1.15)$$

Rešavajući sistem jednačina (1.15) dobija se $r = 2cm$ i $s = 13cm$.



Površina zarubljene kupe iznosi $P = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)\pi s = 49\pi + 4\pi + 9\pi \cdot 13 = 170\pi cm^2$, a zapremina $V = \frac{H\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{12\pi}{3}(49 + 4 + 14) = 268\pi cm^3$.

17. Kako je $B_1 = B_2$ i $H_1 : H_2 = 1 : 3 \Longleftrightarrow H_2 = 3H_1$, sledi $V_2 = B_2 \cdot H_2 = B_1 \cdot 3H_1 = 3V_1 = 108\pi cm^3$.

18. Površina omotača valjka je $M = 2r\pi H \Longleftrightarrow 50\pi = 10\pi H$, odakle sledi da je visina valjka $H = 5$. Zapremina valjka je $V = r^2\pi H = 5^2\pi \cdot 5 = 125\pi$.

19. Osnovna ivica šestostrane prizme a je jednaka poluprečniku osnove valjka r, tj. $a = 2m$. Zapremina prizme iznosi $V = B \cdot H = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot H = \frac{3}{2}2^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, tj. $V = 18m^3$.

20. Površina lopte je $P = 4r^2\pi$. Nakon povećanja za 1 nova površina lopte biće $P_1 = 4(r+1)^2\pi$. Tada je $P_1 - P = 4(2r+1)\pi = 8\pi$, odakle je $r = \frac{1}{2}cm$. Sledi $V_1 - V = \frac{4}{3} \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\pi = \frac{13}{3}\pi cm^3$, odnosno zapremina lopte nakon povećanja poluprečnika za $1cm$ se povećala za $\frac{13}{3}\pi cm^3$.

8. Trigonometrija

1. Izračunati vrednost izraza $\frac{\cos x}{1 - tg\, x} - \frac{\sin x}{ctg\, x - 1}$, ako je $\sin x = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

2. Pokazati da je $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.

3. Dato je $tg\frac{x}{2} = 3$. Naći $\sin x$ i $\cos x$.

4. Ako je $\cos x = \frac{a}{b+c}$, $\cos y = \frac{b}{a+c}$ i $\cos x = \frac{c}{a+b}$, dokazati da je

$$tg^2\frac{x}{2} + tg^2\frac{y}{2} + tg^2\frac{z}{2} = 1.$$

5. Naći sva rešenja trigonometrijske jednačine:

$$\sin x - \sin 3x = 0.$$

6. Naći sva rešenja jednačine:

$$\sin 2x + 2\cos x = 0.$$

7. Odrediti interval u kome se kreće realan parametar a tako da jednačina $\sin x \cos x = a$ ima rešenja. Za $a = \frac{1}{2}$ naći sva rešenja jednačine.

8. Izračunati zbir svih rešenja jednačine:

$$\cos x - 2\sin^2 x + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi].$$

9. Rešiti nejednačinu:

$$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 > 0.$$

10. Rešiti nejednačinu:

$$2\sin x + \cos 2x > 1.$$

Rešenja

1. Kako je $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{16}{25}$ i $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ sledi da je $\cos x = -\frac{4}{5}$. Dalje je $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$ i $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{4}{3}$, pa je $\frac{\cos x}{1-tg\, x} - \frac{\sin x}{ctg\, x - 1} = -\frac{1}{5}$.

2. $$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin x\cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y)\\ &= (\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2\\ &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y\\ &= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\sin^2 x)\sin^2 y\\ &= \sin^2 x - \sin^2 y\end{aligned}$$

3. Polazeći od identiteta $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ i $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$, dobija se

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 3^2}{1+3^2} = \frac{3}{5}, \ \sin\alpha = \frac{3}{5},$$
$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-3^2}{1+3^2} = \frac{4}{5}, \ \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

4. $$\begin{aligned} tg^2\frac{x}{2} + tg^2\frac{y}{2} + tg^2\frac{z}{2} &= \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}} + \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}}\\ &= \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1-\cos y}{1+\cos y} + \frac{1-\cos z}{1+\cos z}\\ &= \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} + \frac{1-\frac{b}{a+c}}{1+\frac{b}{a+c}} + \frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}}\\ &= \frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{a+c-b}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1\end{aligned}$$

5. $\sin x - \sin 3x = 0 \iff 2\cos\dfrac{x+3x}{2}\sin\dfrac{x-3x}{2} = 0 \iff 2\cos 2x \sin -x = 0$

$$\begin{aligned}
&\iff -2\cos 2x \sin x = 0 \iff \cos 2x \sin x = 0\\
&\iff \cos 2x = 0 \lor \sin x = 0\\
&\iff (2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z) \lor (x = n\pi, n \in Z) \iff\\
&\iff (x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z) \lor (x = n\pi, n \in Z)\\
&\iff x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in Z \lor x = n\pi, n \in Z
\end{aligned}$$

Dakle, sva rešenja jednačine su $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in Z$ i $x = n\pi$, $n \in Z$ (Z je skup celih brojeva).

6. $\sin 2x + 2\cos x = 0$

$$\begin{aligned}
&\iff 2\sin x\cos x + 2\cos x = 0 \iff 2\cos x(\sin x + 1) = 0\\
&\iff (\cos x = 0) \lor (\sin x + 1 = 0) \iff (\cos x = 0) \lor (\sin x = -1)\\
&\iff \Big(x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\Big) \lor \Big(x_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z\Big)\\
&\iff \Big(x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\Big) \lor \Big(x_n = (4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\Big)
\end{aligned}$$

7. $\sin x \cdot \cos x = a \iff 2\sin x \cdot \cos x = 2a \iff \sin 2x = 2a$. Da bi ova jednačina imala rešenje mora biti $|2a| \leq 1 \iff -1 \leq 2a \leq 1 \iff -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \iff a \in \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$.

Za $a = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin 2x = 1 \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

8. $\cos x - 2\sin^2 x + 1 = 0 \iff \cos x - 2(1 - \cos^2 x) + 1 = 0$

$$\iff 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Uvodjenjem smene $\cos x = t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 + t - 1 = 0$ čija su rešenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. To znači da je $\cos x = -1 \land \cos x = \frac{1}{2}$. Odatle sledi $x \in (\pi + k\pi,\ k \in Z) \land x \in \big(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z\big) \cup \big(\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z\big)$. Rešenja jednačine koja pripadaju intervalu $[0, 2\pi]$ su $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ i $x = \frac{5\pi}{3}$, a njihov zbir je 3π.

9. Uvodjenjem smene $\sin x = t$ nejednačina $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 > 0$ postaje kvadratna nejednačina $2t^2 + 5t + 2 > 0$. Rešenja ove kvadratne nejednačine pripadaju intervalu $t \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$. Kako je $-1 \leq \sin x \leq 1$, sledi da je $\sin x > -\frac{1}{2}$, tj. $x \in \big(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\big)$, $k \in Z$.

10. $2\sin x + \cos 2x > 1 \iff 2\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 > 0$

$$\begin{aligned}
&\iff 2\sin x - 2\sin^2 x > 0\\
&\iff 2\sin x(1 - \sin x) > 0
\end{aligned}$$

Uvodjenjem smene $\sin x = t$ dobija mo kvadratnu nejednačinu $2t(1-t) > 0$ čije je rešenje interval $t \in (0, 1)$. Sledi $\sin x \in (0, 1)$, pa je $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

9. Analitička geometrija u ravni

1. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz presek pravih $2x - 3y - 5 = 0$ i $x + 2y + 1 = 0$ i stoji normalno na pravoj $3x + 4y = 0$.

2. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(3, 2)$ i sa pravom $x + 2y = 2$ zaklapa ugao od 45^o.

3. Date su tačke $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 4)$. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj BC.

4. Dat je trougao sa temenima $A(-1, 3)$, $B(0, 4)$, $C(-2, -2)$. Odrediti jednačinu visine trougla iz temena C.

5. Odrediti centar i poluprečnik kružnice $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$.

6. Odrediti jednačinu kruga sa centrom u $C(-3, 2)$ koja prolazi kroz tačku $M(0, 6)$.

7. Naći jednačinu kruga poluprečnika 5, koji dodiruje x-osu i prolazi kroz tačku $M(2, 8)$.

8. Napisati jednačinu kruga koji leži u preseku pravih $2x - y = 0$ i $x + y - 7 = 0$ i prolazi kroz koordinatni početak.

9. Kroz tačku $M_1(2, 4)$ u ravni Oxy postaviti pravu koja dodiruje parabolu $y = x^2 + 1$. Napisati jednačinu te prave.

10. Odrediti vrednost parametra k, tako da parabola $y = kx^2$ dodiruje pravu $y = 2x - 2$. Naći koordinate tačke dodira.

Rešenja

1. Rešavanjem sistema jednačina $2x - 3y - 5 = 0 \land x + 2y + 1 = 0$, odnosno

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

dobija se uredjen par brojeva $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1$ i $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{7} = -1$, koji predstavlja koordinate tačke $A(1, -1)$ preseka pravih $2x - 3y - 5 = 0$ i $x + 2y + 1 = 0$. Da bi prava $y + 1 = k(x - 1) \iff y = kx - k - 1$, koja prolazi kroz tačku $A(1, -1)$, bila normalna na datoj pravi $3x + 4y = 0 \iff y = -\frac{3}{4}x$, njen koeficijent pravca k mora biti recipročan i suprotnog znaka od koeicijenta $k_1 = -\frac{3}{4}$ prave $3x + 4y = 0$, tj. $k = -\frac{1}{k_1} \iff k = \frac{4}{3}$. Zamenom ove vrednosti dobijamo jednačinu tražene prave $y = \frac{4}{3} - \frac{7}{3} \iff 4x - y - 7 = 0$.

2. Pramen pravih kroz tačku $M(3,2)$ ima jednačinu $y-2=k(x-3)$, odnosno $y=kx-3k+2$, gde je k koeficijent pravca koji treba odrediti da bar jedna prava pramena zaklapa ugao od 45^o sa datom pravom $x+2y=2 \Longleftrightarrow y=-12x+1$, čiji je koeficijent pravca $k_1=-\frac{1}{2}$.

Polazeći od formule $tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, gde je $\alpha=45^o$, $k_1=-\frac{1}{2}$ i $k_2=k$, pa je

$$\begin{aligned} tg45^o=\left|\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}k}\right| &\Longleftrightarrow 1=\left|\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}\right| \Longleftrightarrow \frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}=\pm 1 \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}=1 \vee \frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}=-1\right) \\ &\Longleftrightarrow (2k+1=2-k \vee 2k+1=k-2) \Longleftrightarrow (3k=1 \vee k=-3) \\ &\Longleftrightarrow (k=\frac{1}{3} \vee k=-3) \end{aligned}$$

Zamenom ovih vrednosti parametra k u jednačini pramena dobijaju se dve prave, čije su jednačine, redom, $y=\frac{1}{3}x+1$ i $y=-3x+11$.

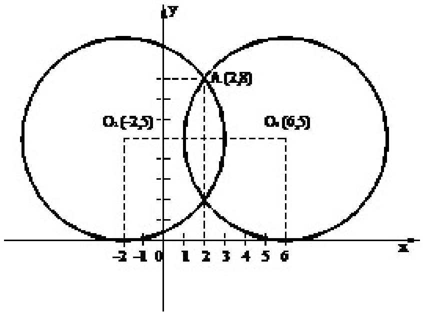
3. Jednačina prave kroz tačke $B(3,1)$ i $C(1,4)$ je $y-1=\frac{4-1}{1-3}\cdot(x-3) \Longleftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$. Koeficijent pravca prave BC je $k_{BC}=-\frac{3}{2}$. Koeficijent pravca prave koja je normalna na pravu BC je $k=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{2}{3}$. Jednačina prave koja sadrži tačku $A(1,1)$ je $y-1=\frac{2}{3}(x-1) \Longleftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \Longleftrightarrow 2x-3y+1=0$.

4. Jednačina prave kroz tačke $A(-1,3)$ i $B(0,4)$ je $y-3=\frac{4-3}{0+1}\cdot(x+1) \Longleftrightarrow y=x+4$. Koeficijent pravca prave AB je $k_{AB}=1$. Koeficijent pravca visine koja odgovara stranici AB je $k=-\frac{1}{k_{AB}}=-1$. Jednačina visine iz tačke $C(-2,-2)$ je $y+2=-1\cdot(x+2) \Longleftrightarrow y=-x-4 \Longleftrightarrow x+y+4=0$.

5. Jednačinu kružnice transformišemo na sledeći način $x^2+y^2-x-2y=0 \Longleftrightarrow x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+y^2-2y=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y-1)^2-1=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$, pa je centar kružnice $C(\frac{1}{2},1)$, a poluprečnik $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. Jednačina kružnice sa centrom u $C(-3,2)$ je $(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$. Kako kružnica sadrži tačku $M(0,6)$ važi $(0+3)^2+(6-2)^2=r^2 \Longleftrightarrow r^2=25$, pa je poluprečnik kruga $r=5$. Dakle, jednačina kružnice je $(x+3)^2+(y-2)^2=25$. 7.

Neka je $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ jednačina traženog kruga. S obzirom da krug dodiruje x-osu, to je $q=r=5$, pa je $(x-p)^2+(y-5)^2=25$. Tačka $A(2,8)$ pripada krugu, pa njene koordinate zadovoljavaju jednačinu kruga, tj. $(2-p)^2+(8-5)^2=25$, odnosno $p^2-4p-12=0$, odakle je $p_1=6$ i $p_2=-2$. Zadatak ima dva rešenja, odnosno postoje dva kruga $(x-6)^2+(y-5)^2=25$ i $(x+2)^2+(y-5)^2=25$ koji sadrže tačku $A(2,8)$ i dodiruju x-osu, čiji su centri $O_1(6,5)$ i $O_2(-2,5)$, što se može videti na prikazanoj slici.



8. Koordinate centra kruga dobijamo rešavanjem sistema linearnih jednačina $2x - y = 0 \wedge x + y - 7 = 0$ odakle je $x = 4$ i $y = 3$, pa je $(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2$. Poluprečnik r kruga dobijamo iz uslova da krug prolazi kroz koordinatni početak, tj. $(0-4)^2 + (0-3)^2 = r^2 \iff r^2 = 25$, odakle je $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ jednačina traženog kruga.

9. Da bi prava $y - 4 = k(x-2) \iff y = kx - 2k + 4$ kroz tačku $M_1(2,4)$ dodirivala parabolu $y = x^2 + 1$ mora sistem jednačina $y = kx - 2k + 4 \wedge y = x^2 + 1$ imati dvostruko rešenje, odakle, posle eliminacije nepoznate y, dolazimo do jednačine $x^2 + 1 = kx - 2k + 4$, odnosno $x^2 - kx + 2k - 3 = 0$ koja ima dvostruke korene ako je njena diskriminanta $D = (-k)^2 - 4(2k-3) = 0 \iff k^2 - 8k + 12 = 0$, odakle je $k_1 = 6$ i $k_2 = 2$. Zadatak ima dva rešenja: za $k = 6$ dobija se dodirna prava $y = 6x - 8$, a za $k = 2$ prava $y = 2x$.

10. Da bi parabola $y = kx^2$ dodirivala pravu $y = 2x - 2$, mora jednačina $kx^2 = 2x - 2 \iff kx^2 - 2x + 2 = 0$, dobijena eliminacijom nepoznate y iz sistema $y = kx^2 \wedge y = 2x - 2$, imati dvostruke korene, odnosno njena diskriminanta mora biti jednaka nuli, tj. $D = 4 - 8k = 0$, odakle je $k = \frac{1}{2}$. Rešavajući sistem $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge y = 2x - 2$ dobija se $x = 2 \wedge y = 2$, pa je $M(2,2)$ tačka dodira.

Glava 2

Primeri kombinacija za prijemni ispit

Kombinacija 1

1. Naći vrednost izraza $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$.

2. Niz brojeva čini geometrijski niz sa količnikom 2, poslednji član niza je 384, a zbir svih članova je 765. Odrediti broj članova tog niza.

3. Izračunati $\log_6 72$ ako je $\log_2 3 = a$.

4. Rešiti jednačinu:
$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2\frac{1}{6}.$$

5. Ako je hipotenuza $c = 4cm$, a za merne brojeve oštrih uglova važi $\alpha : \beta = 1 : 3$, koliko iznosi površina pravouglog trougla?

6. Rešiti eksponencijalnu jednačinu:
$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

7. Naći sva rešenja trigonometrijske jednačine
$$\sin 2x - \cos x = 0$$
na intervalu $(0, 2\pi)$.

8. Odrediti koordinate centra i poluprečnik kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

9. U prav valjak poluprečnika osnove $2m$ i visine $\sqrt{3}m$ upisana je pravilna šestostrana prizma, tako da osnove prizme pripadaju osnovama valjka. Koliko iznosi zapremina prizme?

10. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presečnu tačku pravih $x + 7y - 12 = 0$ i $2x - y + 6 = 0$ i tačku $A(8, -4)$.

Rešenja

1. Vrednost izraza je 1.

2. Iz datih podataka je $q = 2$, $a_n = 384$ i $S_n = 765$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 384 \Longleftrightarrow a_1 2^{n-1} = 384 \tag{2.1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = 765 \Longleftrightarrow a_1(q^n - 1) = 765 \Longleftrightarrow a_1(2^{n-1} \cdot 2 - 1) = 765$$

$$\Longleftrightarrow a_1 2^{n-1} \cdot 2 - a_1 = 765 \tag{2.2}$$

Eliminacijom $a_1 2^{n-1}$ iz (2.1) i (2.2) dobija se $a_1 = 3$. Zamenom u (2.1) $3 \cdot 2^{n-1} = 384 \Longrightarrow 2^{n-1} = 128 \Longrightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Longrightarrow n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 8$, što predstavlja traženi broj članova geometrijskog niza.

3. Način 1: $\log_6 72 = \log_6(6^2 \cdot 2) = \log_6 6^2 + \log_6 2 = 2\log_6 6 + \frac{1}{\log_2 6} = 2 + \frac{1}{\log_2(2\cdot 3)} = 2 + \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 3} = 2 + \frac{1}{1+a} = \frac{2a+3}{a+1}$

Način 2: Koristeći identitet $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ sledi $\log_6 72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 6} = \frac{\log_2(3^2 \cdot 2^3)}{\log_2(3 \cdot 2)} = \frac{\log_2 3^2 + \log_2 2^3}{\log_2 3 + \log_2 2} = \frac{2\log_2 3 + 3\log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 2} = \frac{2a+3}{a+1}$

4. Jednačina ima dva rešenja $x_1 = 10$ i $x_2 = -10$.

5. Kako je $\alpha : \beta = 1 : 3$, sledi $\beta = 3\alpha$. Zbir oštrih uglova u pravouglom trouglu je 90^o, odakle se dobija $2\alpha = 45^o$. Zatim, $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Longrightarrow a = c\sin\alpha$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Longrightarrow b = c\cos\alpha$, pa je površina trougla $P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}cm^2$.

6. Data jednačina se može zapisati u obliku $3 \cdot (2^2)^x + \frac{1}{3} \cdot (3^2)^{x+2} = 6 \cdot (2^2)^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot (3^2)^{x+1} \Longrightarrow 3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{3} \cdot 3^4 \cdot 3^{2x} = 6 \cdot 2^2 \cdot 2^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 3^{2x}$. Sredjivanjem izraza se dobija $3^{2x} \cdot \frac{63}{2} = 2^{2x} \cdot 24 \Longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{42}{63} = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, odakle je $2x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

7. $\sin 2x - \cos x = 0$

$$\Longleftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \Longleftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0$$

$$\Longleftrightarrow (2\sin x - 1 = 0) \vee (\cos x = 0) \Longleftrightarrow \left(\sin x = \frac{1}{2}\right) \vee (\cos x = 0)$$

$$\Longleftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

8. Data jednačina kružnice se transformiše u $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, odakle se zaključuje da centar ima koordinate $x = 3$ i $y = 2$, tj. $C(3, 2)$, a poluprečnik kružnice je $r = 2$.

9. Baza prizme je šestougao upisan u kružnicu (baza valjka), pa je stranica a šestougla jednaka poluprečniku kruga r u koji je upisan, tj. $a = r = 2cm$. Visina

prizme je jednaka visini valjka $H = \sqrt{3}cm$. Zapremina prizme je $V = B \cdot H = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot H = 18cm^3$.

10. Presečna tačka M(-2,2) datih pravih se dobija kao rešenje sistema $x + 7y - 12 = 0 \wedge 2x - y + 6 = 0$. Jednačina prave kroz dve tačke M(-2,2) i A(8,-4) je $y - 2 = \frac{-4-2}{8-(-2)}(x - (-2)) \Longrightarrow y - 2 = \frac{-6}{10}(x + 2)$, odnosno $3x + 5y - 4 = 0$.

Kombinacija 2

1. Skratiti razlomak $\frac{x^4-4x^3+4x^2}{x^3-4x}$.
2. Odrediti članove aritmetičke progresije ako je zbir petog i sedmog člana 34, a zbir prvih dvadeset članova 610.
3. Izračunati: (a) $\log_2 128$ i (b) $\log_{\sqrt{3}} 81$.
4. Rešiti nejednačinu:
$$\frac{12 - 2x}{x^2 - x} \geq 1.$$
5. Ako je hipotenuza $c = 4cm$, a za merne brojeve oštrih uglova važi $\alpha : \beta = 1 : 3$, koliko iznosi površina pravouglog trougla?
6. Rešiti eksponencijalnu jednačinu:
$$64^x - 3 \cdot 8^x + 2 = 0.$$
7. Date su katete pravouglog trougla $a = 8cm$ i $b = 6cm$. Odrediti vrednosti svih trigonometrijskih funkcija uglova α i β.
8. Izvodnica prave kupe nagnuta je prema ravni osnove pod uglom od 60^o. Odrediti površinu i zapreminu kupe, ako je površina omotača $18\pi cm^2$.
9. Izračunati zapreminu pravilne jednakoivične trostrane piramide ivice a.
10. Napisati jednačinu kruga čiji centar leži u preseku pravih $2x - y - 5 = 0$ i $x + y - 7 = 0$ i prolazi kroz koordinatni početak.

Rešenja

1. $\frac{x(x-2)}{(x+2)}$

2. Ako je a_1 prvi član, a d razlika aritmetičke progresije, tada je $a_5 = a_1 + 4d$, $a_7 = a_1 + 6d$ i $S_{20} = 10(2a_1 + 19d)$, pa je $a_5 + a_7 = 34 \Longleftrightarrow a_1 + 4d + a_1 + 6d = 34 \Longleftrightarrow 2a_1 + 10d = 34 \Longleftrightarrow a_1 + 5d = 17$, odnosno $10(2a_1 + 19d) = 610 \Longleftrightarrow 2a_1 + 19d = 61$. Rešavanjem sistema jednačina $a_1 + 5d = 17$ i $2a_1 + 19d = 61$ dobija se $a_1 = 2$ i $d = 3$, pa je niz $2, 5, 8, \ldots$ tražena aritmetička progresija.

3. (a) 7, (b) 8

4. $\dfrac{12-2x}{x^2-x} \geq 1 \Longleftrightarrow \dfrac{12-2x}{x^2-x} - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{12-2x-x^2+x}{x^2-x} \geq 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{-x^2-x+12}{x^2-x} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2+x-12}{x^2-x} \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow (x^2+x-12 \leq 0 \wedge x^2-x>0) \vee (x^2+x-12 \geq 0 \wedge x^2-x<0)$$
$$\Longleftrightarrow (x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)) \vee (x \in (-\infty,-4] \cup [3,+\infty) \wedge x \in (0,1))$$
$$\Longleftrightarrow (x \in [-4,0) \cup (1,3]) \vee (x \in \emptyset) \Longleftrightarrow x \in [-4,0) \cup (1,3]$$

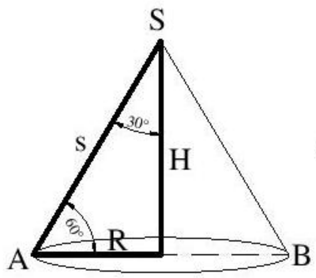
jer $x^2+x-12 \geq 0 \Longleftrightarrow (-\infty,-4] \cup [3,+\infty)$ i $x^2-x>0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$, odnosno $x^2+x-12 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in [-4,3]$ i $x^2-x<0 \Longleftrightarrow x \in (0,1)$.

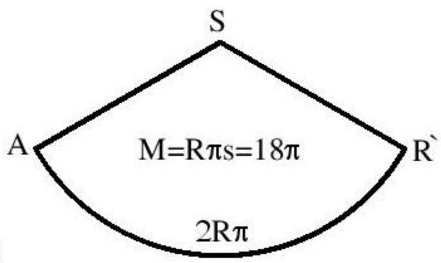
5. Zadatak 5 iz Kombinacije 1

6. $64^x - 3 \cdot 8^x + 2 = 0 \Longleftrightarrow (8^2)^x - 3 \cdot 8^x + 2 = 0 \Longleftrightarrow (8^x)^2 - 3 \cdot 8^x + 2 = 0$. Uvodeći smenu $8^x = t$ dobija se jednačina $t^2 - 3t + 2 = 0$, odakle je $t_1 = 2$ i $t_2 = 1$. Iz $8^x = t_1 \Longleftrightarrow 8^x = 2 \Longleftrightarrow 2^{3x} = 2^1 \Longleftrightarrow 3x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$, odnosno $8^x = t_2 \Longleftrightarrow 8^x = 1 \Longleftrightarrow 2^{3x} = 2^0 \Longleftrightarrow 3x = 0 \Longleftrightarrow x_2 = 0$. Rešenje: $x \in \{0, \frac{1}{3}\}$.

7. Hipotenuza trougla je $c = 10cm$, pa sledi $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $tg\,\alpha = ctg\,\beta = \frac{4}{3}$, $ctg\,\alpha = tg\,\beta = \frac{3}{4}$

8. Površina omotača kupe je $M = R\pi s$, odakle je $18\pi = R\pi s \Longleftrightarrow Rs = 18$. Kako je izvodnica kupe je nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60^o trougao





koji obrazuju prečnik osnovice $2R$ i izvodnice je jednakostraničan stranice, pa je $R = \frac{s}{2}$ i $H = \frac{s\sqrt{3}}{2}$, pa rešavajući sistem jednačina $Rs = 18 \wedge R = \frac{s}{2} \wedge H = \frac{s\sqrt{3}}{2}$ dobija se $s = 6cm$, $R = 3cm$ i $H = 3\sqrt{3}cm$, odakle je $P = B + M = R^2\pi + R\pi s = 27\pi cm^2$ površina kupe, a $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}R^2\pi H = 9\sqrt{3}cm^3$ zapremina kupe.

9. Podnožje visine pravilne jednakoivične trostrane piramide je težište jednakostraničnog trougla. Visina jednakostraničnog trougla ivice a je $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, a rastojanje od temena do težišta je $\frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Longrightarrow H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}.$$

10. Jednačina kruga je $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Kombinacija 3

1. Naći vrednost brojevnog izraza $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$.
2. Prilikom obrade jednog metala od $0.8kg$ otpalo je $0.04kg$. Koliko je procenata materijala otpalo?
3. Izračunati: (a) $\log_2 16$ i (b) $\log_3 243$.
4. Rešiti sistem jednačina:
$$3x - 4y = 2$$
$$2x + 3y = 7.$$
5. Stranice pravouglog trougla čine aritmetičku progresiju. Odrediti dužine stranica tog trougla, ako je njegova površina $96cm^2$.
6. Rešiti eksponencijalnu jednačinu:
$$2 \cdot 9^x - 3^x - 15 = 0.$$
7. Izračunati vrednosti svih trigonometrijskih funkcija oštrog ugla ako je: (a) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, (b) $tg\ \alpha = \frac{1}{7}$.
8. Odrediti koordinate centra i poluprečnik kružnice $4x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.
9. Pravilna trostrana prizma ima visinu jednaku visini trougla u osnovi. Izračunati zapreminu te prizme ako je njena površina $288\sqrt{3}cm^2$.
10. Na pravoj $y = x - 3$ odrediti tačku $M(x, y)$ najbližu tački $M_1(1, 4)$.

Rešenja

1. 4

2. Polazeći od formule za procentni račun $G : P = 100 : p$, gde je $G = 0,8kg$ i $P = 0,04kg$, dobijamo procenat materijala koji je otpao pri obradi, tj. $p = \frac{P}{G} \cdot 100 = \frac{0,04}{0,8} \cdot 100 = \frac{4}{0,8} = \frac{40}{8} = 5\%$.

3. (a) 4, (b) 5

4. $x = 2$, $y = 1$

5. Neka su stranice pravouglog trougla $a = x - d$, $b = x$ i $c = x + d$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $(x-d)^2 + x^2 = (x+d)^2$, odakle se dobija veza $x = 4d$. Kako

je $P = \frac{ab}{2} = 96$, sledi $x(x-d) = 192 \iff 4d(4d-d) = 192 \implies d = 4 \vee d = -4$. Pošto stranica ne može biti negativna, drugo rešenje se odbacuje. Dakle, stranice trougla su $a = 12cm$, $b = 16cm$ i $c = 20cm$.

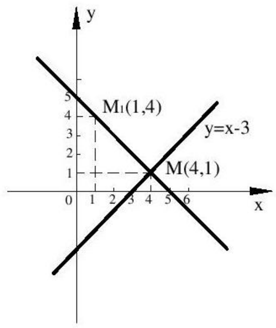
6. Uvodjenjem smene $3^x = t$ eksponencijalna jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu $2t^2 - t - 15 = 0$ čija su rešenja $t_1 = 3$ i $t_2 = -\frac{5}{2}$. Kako je $3^x > 0$, eksponencijalna jednačina ima samo jedno rešenje $x = 1$ (za $t = 3$).

7. (a) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $tg\ \alpha = \frac{7}{24}$, $ctg\ \alpha = \frac{24}{7}$, (b) $\sin\alpha = \frac{1}{50}$, $\cos\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $ctg\ \alpha = 7$

8. $4x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \iff (x + \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16} \implies C(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \wedge r = \frac{1}{4}$

9. $H = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P = 2B + M = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3} = 288\sqrt{3} \implies a = 12cm \implies V = 648cm^3$

10. Način 1: Tražena tačka $M(x, y)$ najbliža datoj tački $M_1(1, 4)$ leži u preseku date prave $y = x - 3$ i njene normale kroz tačku $M_1(1, 4)$. Prava $y = x - 3$ ima koeficijent pravca $k = 1$, a njena normala kroz tačku $M_1(1, 4)$ ima koeficijent pravca $k_1 = -\frac{1}{k} = -1$, pa je njena jednačina $y - 4 = k_1(x - 1) \iff y - 4 = -(x - 1) \iff y = -x + 5$. Rešavanjem sistema jednačina $y = x - 3 \wedge y = -x + 5$ dobijamo $x = 4$ i $y = 1$, pa je $M(4, 1)$ tražena tačka.



Način 2: Proizvoljna tačka $M(x_M, y_M)$ na pravoj $y = x - 3$ ima koordinate $x_M = x$ i $y_M = y = x - 3$, pa je rastojanje te tačke od date tačke $M_1(1, 4)$ dato formulom $d = d(x) = \sqrt{(x_M - 1)^2 + (y_M - 4)^2}$, odnosno $d = \sqrt{(x-1)^2 + (x-3-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (x-7)^2} = \sqrt{2x^2 - 16x + 50}$. Rastojanje $d(x)$ biće najmanje kada kvadratni trinom $2x^2 - 16x + 50 = 2[(x-4)^2 + 9]$ ima najmanju vrednost, a to je za $x = 4$, pa su $x_M = 4$ i $y_M = 1$ koordinate tražene tačke M na pravoj $y = x - 3$ koja je najbliža tački $M_1(1, 4)$.

Kombinacija 4

1. Ako su p i q rešenja kvadratne jednačine $x^2 - x + 1 = 0$, izračunati čemu je jednak izraz $\frac{p^3+q^3}{p^2+q^2}$.

2. Ako za realne brojeve x i y važi $5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 14$ i $6 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y = 9$, izračunati njihov zbir $x + y$.

3. Koji broj će se dobiti ako se broj 110 umanji za 10%?

4. Proizvod prvog i jedanaestog člana geometrijske progresije jednak je 11. Koliki je proizvod petog i sedmog člana te progresije?

5. Osnovica jednakokrakog trougla je $30km$, a visina koja odgovara njegovom kraku je $24km$. Izračunati koliko iznosi visina koja odgovara osnovici tog trougla.

6. Naći skup rešenja nejednačine:
$$|2x - 3| \leq 5.$$

7. Odrediti rešenje trigonometrijske jednačine:
$$\cos 2x = \sin x.$$

8. Čemu je jednak proizvod svih rešenja jednačine
$$\sqrt{2x^2 + 1} = x^2 - 1?$$

9. Ako je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka ivice 6, kolika je zapremina piramide AB_1CD_1?

10. Omotač prave kupe je kružni isečak površine $M = 10\pi$ i sa centralnim uglom $\alpha = 36^o$. Kolika je zapremina te kupe?

Rešenja

1. Ako su p i q rešenja kvadratne jednačine $x^2 - x + 1 = 0$, tada je na osnovu Vijetovih formula $p + q = 1$ i $p \cdot q = 1$. Izraz $\frac{p^3+q^3}{p^2+q^2}$ može se transformisati na sledeći način $\frac{p^3+q^3}{p^2+q^2} = \frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{p^2+q^2} = \frac{(p+q)((p+q)^2-3pq)}{(p+q)^2-pq}$, pa je $\frac{p^3+q^3}{p^2+q^2} = 2$.

2. Smenom $2^x = p$ i $3^y = q$ dodija se sistem jednačina $5 \cdot p - 2 \cdot q = 14 \wedge 6 \cdot p - 5 \cdot q = 9$ čija su rešenja $p = 4$ i $q = 3$, odakle sledi $x = 2$ i $y = 1$, pa je $x + y = 3$.

3. 99

4. $11 = a_1 \cdot a_{11} = a_1 \cdot (a_1 \cdot q^{10}) = a_1^2 \cdot q^{10}$, q-količnik geometrijske progresije
$a_5 \cdot a_7 = (a_1 \cdot q^4) \cdot (a_1 \cdot q^6) = a_1^2 \cdot q^{10} \Longrightarrow a_5 \cdot a_7 = 11$

5. Površina jednakokrakog trougla je $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}$, iz čega sledi $30h_a = 24b \Longrightarrow b = \frac{5}{4}h_a$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \left(\frac{5}{4}h_a\right)^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, odakle se dobija $h_a = 20km$.

6. $x \in [-1, 4]$

7. $\cos 2x = \sin x \Longleftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Longleftrightarrow (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = \sin x \Longleftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Uvodjenjem smene $\sin x = t$ dobija se kvadratna jednačina $2t^2 + t - 1 = 0$ čija su rešenja $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = -1$. Dakle, rešenja polazne jednačine su rešenja jednačina $\sin x = \frac{1}{2}$ i $\sin x = -1$, odnosno $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

8. Rešenja jednačine su $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$ i $x_4 = -2$, pa je njihov proizvod jednak nuli.

9. Način 1: Piramida AB_1CD_1 je tetraedar ivice $a\sqrt{2}$ čija je zapremina $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 72$. Visina H se nalazi iz veze $H^2 = (a\sqrt{2})^2 - (\frac{2}{3}h)^2$, pri čemu je h visina jednakostraničnog trougla.

Način 2: Zapeminu piramide AB_1CD_1 dobijamo kada od zapremine kocke oduzmemo zapremine četiri piramide $ABCB_1$, $ADCD_1$, $A_1B_1D_1A$ i $B_1C_1D_1C$, čije su baze jednakokrako pravougli trouglovi sa katetama jednakim a i visinama jednakim a, tj. $V = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = 72$.

10. Iz $M = \frac{s^2\pi\alpha}{360^o}$ sledi $s = 10$. Dalje, iz $M = r\pi s$ sledi $r = 1$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $h^2 = s^2 - r^2$, pa je $h = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$. Zapremina piramide je jednaka $V = \pi\sqrt{11}$.

Kombinacija 5

1. Odrediti vrednost izraza $\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Naći skup rešenja nejednačine:
$$||x| - 3| \leq 1.$$

3. Naći vrednost izraza $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{3}{a-1}$ za $a = -\frac{1}{3}$.

4. Ravan koja sadrži središte jednog poluprečnika lopte i normalna je na njemu, seče tu loptu tako da je površina preseka jednaka $48\pi cm^2$. Koliki je poluprečnik lopte?

5. Naći rešenje jednačine:
$$2\ln x = \ln(x + 2).$$

6. U pravouglom trouglu ABC krug prečnika AC seče njegovu hipotenuzu AB u tački D. Ako je $BC = 4\sqrt{6}$ i $AD = 4$, izračunati dužinu odsečka BD.

7. Koji će se broj dobiti ako se broj 91 uveća za 10%?

8. Jednakokraki trapez čija je visina 12, krak 13, a srednja linija 15 obrće se oko svoje manje osnovice. Kolika je zapremina dobijenog obrtnog tela?

9. Naći zajedničke tačke prave $x - y + 2 = 0$ i kružnih linija $(x+2)^2 + y^2 = 1$ i $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

10. Ako je $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$, koliko je $tg\ \alpha$?

Rešenja

1. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3}$

2. $x \in [-4, 2] \cup [2, 4]$

3. $\frac{33}{28}$

4. Poluprečnik preseka je $r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}cm$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $R^2 = r^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$, pa je poluprečnik lopte jednak $R = 8cm$.

5. Kako je logaritam definisan samo za pozitivne vrednosti, mora biti $x > 0$ i $x + 2 > 0 \iff x > -2$, tj. $x > 0$. Rešavanjem polazne jednačine dobijamo $x_1 = 2$ i $x_2 = -1$, ali zbog oblasti definisanosti negativno rešenje odbacujemo, pa je jedino rešenje jednačine $x = 2$.

6. Trougao ACD je pravougli, pa je i trougao BCD pravougli trougao. Odatle sledi $CD^2 = BC^2 - BD^2 \Longrightarrow CD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Pri tome, ova dva trougla su slični trouglovi, pa je $AD : CD = CD : BD$. Dakle, $AD = 4$.

7. 100,1

8. $h = 12$, $c = 13$, $m = \frac{a+b}{2} = 15$

$a = b + 2x$, $x^2 = c^2 - h^2 \Longrightarrow x = 5$

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{(b+10)+b}{2} = b + 5 \Longrightarrow b = 10 \Longrightarrow a = 20$

Zapremina tela je jednaka zapremini valjka (sa poluprečnikom osnove $r = h = 12$ i visinom $H_v = a = 20$) umanjenoj za dve zapremine kupe (poluprečnika osnove $r = h = 12$ i visinom $H_k = x = 5$), tj. $V = V_v - 2V_k = r^2\pi H_v - 2 \cdot \frac{1}{3} r^2 \pi H_k = 2400\pi$.

9. $x - y + 2 = 0 \iff y = x + 2$

$(x+2)^2 + y^2 = 1 \iff (x+2)^2 + (x+2)^2 = 1 \Longrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \wedge x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \Longrightarrow y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dakle, presečne tačke prave i prve kružne linije su $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Na sličan način se dobija presečna tačka prave $x - y + 2 = 0$ i kružne linije $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ i to je tačka $C(1, 3)$.

10. $tg\,(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{tg\,x - 1}{1 + tg\,x} = \frac{3}{4} \Longrightarrow tg\,x = 7$

Kombinacija 6

1. Uprostiti izraz $\frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^3+1}\right)$.

2. Rešiti nejednačinu:
$$\frac{4}{x^2-4} + 1 < 0.$$

3. Rešiti jednačinu:
$$5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3.$$

4. Stranica romba je $a = 9cm$, a zbir dijagonala $d_1 + d_2 = 24cm$. Izračunati površinu romba.

5. Bočne ivice piramide imaju dužinu $5cm$. Osnova piramide je pravougli trougao čije se katete odnose kao $3 : 4$, a dužina hipotenuze je $8cm$. Izračunati zapreminu piramide.

6. Rešiti trigonmetrijsku jednačinu:
$$\sin 3x - 2 \sin x = 0.$$

7. Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $x^2 + (1 - 3m)x + m^2 + 1 = 0$, odrediti realan paramear m tako da je $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

8. U kupi čiji je osni presek jednakostraničan trougao upisana je lopta zapremine $\frac{32}{3}\pi$. Kolika je zapremina kupe?

9. Trinaesti član aritmetičkog niza $-2, -6, -10, \ldots$ je?

10. Odrediti parameter k tako da funkcija $y = \frac{3k-1}{k-2}x + 2k - 1$ bude rastuća.

Rešenja

1. a

2. $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

3. $x = 2$

4. $P = 63cm^2$

5. Bočne ivice piramide su jednake tako da je osnova visine centar opisanog kruga oko osnove, tj. pravouglog trougla. A centar opisanog kruga oko pravouglog trougla leži na polovini hipotenuze. Iz veze $a : b = 3 : 4$ i $c = 8cm$, dobijaju se veličine kateta $a = \frac{24}{5}$ i $b = \frac{32}{5}$. Visina se nalazi iz jednakokrakog trougla koji grade hipotenuza i dve bočne ivice i iznosi $H = 3cm$. Zapremina piramide je $V = \frac{1}{3}\frac{ab}{2}H = \frac{384}{25}cm^3$.

6. $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

7. $m = 1$ i $m = 2$

8. $V = 24\pi$
9. $a_{13} = -50$
10. Funkcija će biti rastuća ako je $\frac{3k-1}{k-2} > 0$, tj. kada je $k \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$.

Kombinacija 7

1. Izračunati vrednost izraza $\left[\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) : \left(13 + \frac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$.
2. Koji će se broj dobiti ako se broj 70 uveća za 20%?
3. Izračunati:
(a) $\log_2 32$ i (b) $\log_3 27$.
4. Naći skup rešenja nejednačine:
$$|2x - 3| \leq 5.$$
5. Zbir prvog i sedmog člana aritmetičke progresije jednak je 7. Koliko iznosi zbir trećeg i osmog člana te progresije?
6. Rešiti jednačinu:
$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0.$$
7. Izračunati vredosti svih trigonometrijskih funkcija oštrog ugla ako je: (a) $\sin\alpha = 0.6$, (b) $\cos\frac{12}{13}$.
8. U pravouglom trouglu jedna kateta je $8cm$, a druga je $2cm$ kraća od hipotenuze. Izračunati kolika je površina tog trougla.
9. Površina omotača pravog kružnog valjka je 50π, a poluprečnik osnove $r = 5$. Kolika je zapremina tog valjka?
10. U koordinatnom sistemu xOy prava $y = -x + 3$ seč osu Ox u tački A i pravu $y = 2x$ u tački B. Odrediti koordinate tačaka A i B i površinu trougla OAB.

Rešenja

1. 3
2. 84
3. (a) 5, (b) 3
4. $x \in [1, 4]$
5. 7

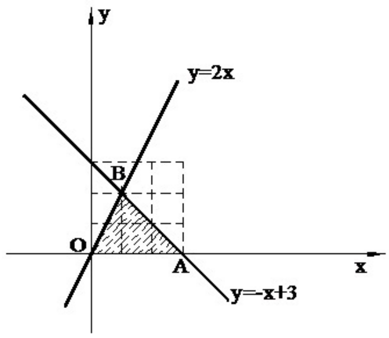
6. $x = 0$ i $x = 1$

7. (a) $\cos\alpha = 0,8$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $ctg\alpha = \frac{4}{3}$; (b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $tg\alpha = \frac{5}{12}$, $ctg\alpha = \frac{12}{5}$

8. $P = 60cm^2$

9. $V = 125\pi$

10. $P = 3$



Sadržaj