Ako karakteristična jednadžba jednadžbe $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ima dva različita rješenja (realna ili kompleksna) x_1 i x_2, opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe je oblika

$$y(t) = C_1 e^{x_1 t} + C_2 e^{x_2 t}.$$

Primjer

Za jednadžbu $y'' - 4y' + 5y = 0$ *karakteristična jednadžba* $x^2 - 4x - 5 = 0$ *ima dva rješenja:* $x_1 = 5$ *i* $x_2 = -1$ *pa je rješenje* $y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$.

Ako karakteristična jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje x, pripadna rješenja diferencijalne jednadžbe su linearno zavisna (degeneracija). Stoga nam u tom slučaju treba još jedno, s e^{xt} linearno nezavisno, rješenje. Ono se dobiva pokušajem s test-funkcijom $y(t) = te^{xt}$ te u slučaju jedinstvenog rješenja x karakteristične jednadžbe opće rješenje jednadžbe $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ poprima oblik

$$y(t) = C_1e^{xt} + C_2te^{xt}.$$

Primjer

Rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = 0$ *je* $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$.

Ako kvadratna jednadžba ima kompleksna rješenja, ona su međusobno kompleksno konjugirana (dakle i različita). Rješenja kvadratne jednadžbe $a_2x^2 + a_1 + a_0 = 0$ ako je njena diskriminanta $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ negativna su

$$x_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm i\frac{\sqrt{-D}}{2a_0} = a \pm ib.$$

Uvrštavanje u formulu za opće rješenje $y(t) = c_1e^{x_1t} + c_2e^{x_2t}$ daje:

$$y(t) = c_1e^{x_1t}+c_2e^{x_2t} = c_1e^{at+ibt}+c_2e^{at-ibt} = e^{at}(c_1e^{ibt}+c_2e^{-ibt}) =$$
$$= e^{at}(c_1\cos(bt) + ic_1\sin(bt) + c_2\cos(bt) - ic_2\sin(bt)) =$$
$$= e^{at}((c_1 + c_2)\cos(bt) + i(c_1 - c_2)\sin(bt)).$$

Ako nas zanimaju samo realne funkcije y, brojevi $C_1 = c_1 + c_2$ i $C_2 = i(c_1 - c_2)$ moraju biti realni, što je moguće postići pogodnim odabirom kompleksnih konstanti c_1 i c_2. Stoga je u slučaju kompleksnih rješenja karakteristične jednadžbe uobičajeno opće rješenje pisati u obliku

$$y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt)).$$

Primjer

Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$2y'' + y' + 5y = 0.$$

Karakteristična jednadžba je

$$2x^2 + x + 5 = 0$$

i ona nema realnih rješenja. Računamo:

$$a = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{\sqrt{4 \cdot 5 \cdot 2 - 1^2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

Slijedi da je

$$y(t) = e^{-t/4} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4} t\right)\right).$$