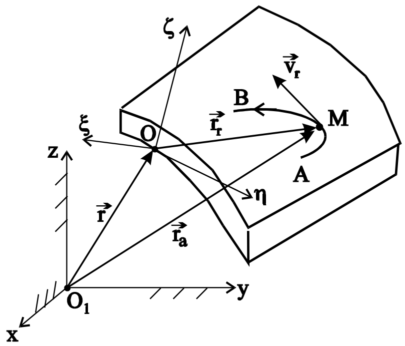
2.7. SLOŽENO KRETANJE TAČKE

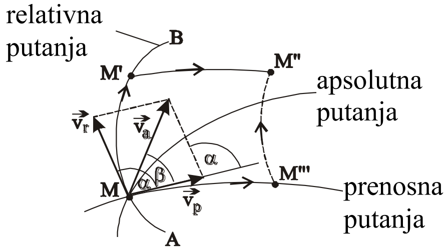
To je kretanje tačke po telu koje se kreće u odnosu na nepokretno telo; određuje se u dva koordinatna sistema- prvi je sistem O_1xyz koji se vezuje za nepokretno telo a drugi je pokretni $O\xi\eta\zeta$ koji se čvrsto vezuje za pokretnu tačku i kreće se zajedno sa njom u odnosu na sistem referencije.

Relativno kretanje - proučava se u sistemu $O\xi\eta\zeta$; relativna putanja je AB; relativna brzina $\vec{v}_r$, relativno ubrzanje $\vec{a}_r$, relativni vektor položaja $\vec{r}_r$.



Prenosno kretanje - proučava se u sistemu O_1xyz; to je kretanje tačke tela sa kojom se tačka M poklapa u datom trenutku; brzina te tačke je prenosna brzina $\vec{v}_p$, ubrzanje prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$.

Apsolutno kretanje - kretanje u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz; putanja je apsolutna putanja a brzina i ubrzanje: apsolutna brzina $\vec{v}_a$ i apsolutno ubrzanje $\vec{a}_a$. Složeno (apsolutno) kretanje je rezultat slaganja prenosnog i relativnog kretanja. Vektor $\vec{r}$ definiše položaj tela u odnosu na nepokretni sistem O_1xyz. Apsolutni položaj tačke, u odnosu na nepokretni sistem O_1xyz određen je apsolutnim vektorom položaja $\vec{r}_a$.

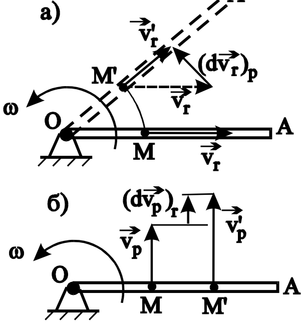


2.7.1. Slaganje brzina

Može se posmatrati prvo relativno, pa zatim prenosno kretanje ili obrnuto. Kao rezultat slaganja relativnog MM' i prenosnog pomeranja M'M", tačka M dolazi u položaj MM". Pomeranje MM" predstavlja apsolutno pomeranje tačke M, za vreme Δt.

Apsolutna brzina se računa po obrascu: $\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p.}$ Vektori $\vec{v}_a, \vec{v}_r, \vec{v}_p$ imaju pravce tangenti na odgovarajuće putanje (apsolutnu, relativnu i prenosnu). Pravac vektora apsolutne brzine $\vec{v}_a$ dobija se konstrukcijom paralelograma nad vektorima $\vec{v}_r$ *i* $\vec{v}_p$, a intenzitet se određuje primenom kosinusne teoreme: $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_p^2 - 2v_r v_p \cos(\pi - \alpha)}$, $\Rightarrow \boxed{v_a = \sqrt{v_r^2 + v_p^2 + 2v_r v_p \cos\alpha}.}$

(α je ugao između $\vec{v}_r$ *i* $\vec{v}_p$), pravac brzine $\vec{v}_a$ određuje ugao β koji zaklapaju brzine $\vec{v}_p$ *i* $\vec{v}_a$.



2.7.2. Slaganje ubrzanja

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p. \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_p}{dt}, \qquad \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{a}_a$$

Na promenu relativne brzine u toku vremena utiče i prenosno i relativno kretanje (a); promena prenosne brzine zavisi i od prenosnog i od relativnog kretanja (b).

Apsolutno ubrzanje je: $\vec{a}_a = \frac{(d\vec{v}_r)_r}{dt} + \frac{(d\vec{v}_r)_p}{dt} + \frac{(d\vec{v}_p)_p}{dt} + \frac{(d\vec{v}_p)_r}{dt}$,

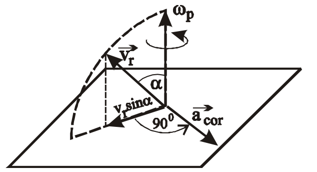
$\frac{(d\vec{v}_r)_r}{dt} = \vec{a}_r$ relativno ubrzanje; $\frac{(d\vec{v}_p)_p}{dt} = \vec{a}_p$ prenosno ubrzanje;

$\frac{(d\vec{v}_r)_p}{dt} + \frac{(d\vec{v}_p)_r}{dt} = \vec{a}_{cor}$ - Koriolisovo ubrzanje - uzima u obzir promenu relativne brzine u toku prenosnog i promenu prenosne brzine u procesu relativnog kretanja.

Konačan izraz za apsolutno ubrzanje tačke M: $\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}.}$

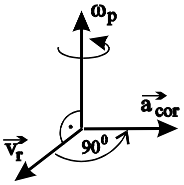
Sa sl. a): $\frac{(d\vec{v}_r)_p}{dt} = (\vec{\omega}_p \, x \, \vec{v}_r)$ po Ojlerovom obrascu za obrtanje brzine $\vec{v}_r$ usled ugaone brzine $\vec{\omega}_p$.

Sa sl. b): $(d\vec{v}_p)_r = \vec{v}_p' - \vec{v}_p = \vec{\omega}_p \times OM' - \vec{\omega}_p \times OM = \vec{\omega}_p \times MM' = \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r dt; \Rightarrow \frac{(d\vec{v}_p)_r}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$;



Vektor Koriolisovog ubrzanja jednak je: $\boxed{\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r}$.

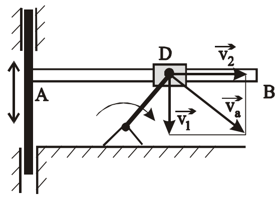
Intenzitet je jednak: $\boxed{a_{cor} = 2\omega_p v_r sin\alpha,}$ (α je ugao između vektora $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$). Pravac vektora $\vec{a}_{cor}$ je normalan na ravan koju čine vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$, a smer se određuje po pravilu desne ruke.



$\vec{a}_{cor} = 0$ ako je: a) prenosno kretanje translatorno ili je slučaj trenutne translacije ($\omega_p=0$); b) kada je $\vec{\omega}_p \| \vec{v}_r$ ($sin\alpha=0$); c) kada je $v_r=0$.

Kada su vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$ upravni međusobom ($sin\alpha=1$): $a_{cor} = 2\omega_p v_r$. Smer vektora $\vec{a}_{cor}$ dobijamo tako što vektor $\vec{v}_r$ obrnemo za 90^0 u smeru prenosnog obrtanja (kao na slici).

2.8. SLOŽENO KRETANJE KRUTOG TELA

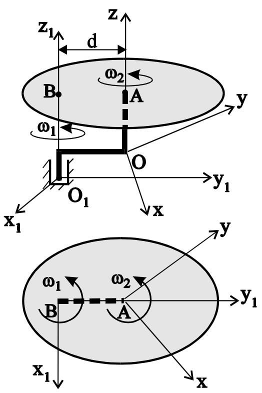


Ako se telo kreće u odnosu na pokretni koordinatni sistem (relativno kretanje), dok se taj sistem istovremeno prenosno kreće u odnosu na nepokretni koordinatni sistem (prenosno kretanje), rezultujuće (apsolutno) kretanje tela naziva se složeno kretanje.

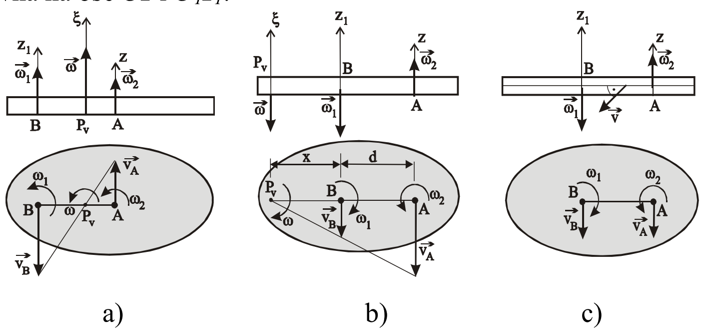
2.8.1. Slaganje translatornih kretanja

Ako se štap AB translatorno kreće brzinom $\vec{v}_1 = \vec{v}_r$ a klizač D translatorno brzinom $\vec{v}_2 = \vec{v}_p$, slaganjem nastaje translatorno kretanje a apsolutna brzina tog kretanja jednaka je $\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$.

2.8.2. Slaganje obrtanja tela oko dve paralelne ose



Prenosno obrtanje - krivaja O_1O obrće se oko ose O_1z_1 ugaonom brzinom ω_1; relativno obrtanje- kružna ploča se obrće oko ose Oz ugaonom brzinom ω_2. Ploča izvodi rezultujuće ravno kretanje, u ravni koja je upravna na ose Oz i O_1z_1.

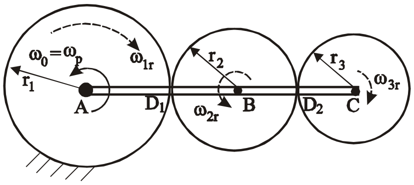


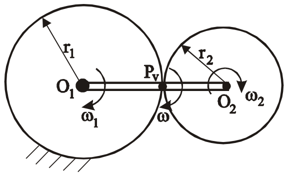
a) b) c)

1) Ako su obrtanja oko osa u istom smeru rezultujuća ugaona brzina, oko trenutne ose, jednaka je $\boxed{\omega=\omega_1+\omega_2}$. Vektor $\vec{\omega}$ leži u ravni vektora $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ paralelan je sa njima, istog je smera i nalazi se između njih (sl.a)

2) Kada su obrtanja u suprotnim smerovima, rezultujuća brzina je $\boxed{\omega=\omega_1-\omega_2}$.Vektor $\vec{\omega}$ leži u ravni vektora $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$, paralelan je sa njima, ima smer vektora veće brzine i nalazi se na strani veće ugaone brzine (sl. b).

3) Kinetički spreg ili spreg ugaonih brzina nastaje u slučaju da su ugaone brzine jednake $\omega_1=\omega_2 \Rightarrow$ brzine tačka $v_A=\omega_1 d$, $v_B=\omega_2 d$ su jednake, paralelne i usmerene u istu stranu (trenutna translacija).



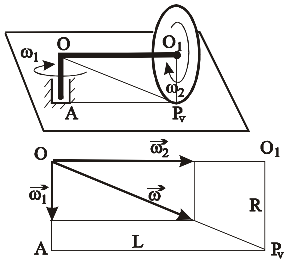


Slika pokazuje primere obrtanja spregnutih zupčanika oko paralelnih osa.

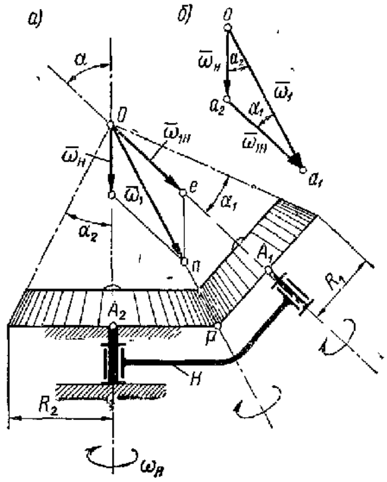
2.8.3. <u>Slaganje obrtanja oko osa koje se seku</u>

Relativno kretanje tela je obrtanje ugaonom brzinom ω_2 oko ose koja je čvrsto vezana za krivaju, a prenosno kretanje je obrtanje krivaje brzinom ω_1. Brzina tačke O će biti jednaka nuli, rezultujuće kretanje će biti obrtanje oko nepokretne tačke O (na slici levo).

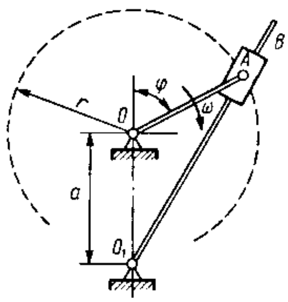
Rotacija oko trenutne ose obrtanja izvodi se ugaonom brzinom $\boxed{\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2}$. Trenutna osa obrtanja usmerena je po dijagonali paralelograma konstruisanog nad vektorima ugaonih brzina $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$. U toku vremena, trenutna osa obrtanja menja svoj položaj opisivajući konusnu površinu, čiji se vrh nalazi u tački O.



Primer ovakvog složenog kretanja imamo kod konusnih zupčastih mehanizama (na slici desno) i kod diferencijalnih prenosnika.



2.9. <u>ZADACI IZ SLOŽENOG KRETANJA</u>



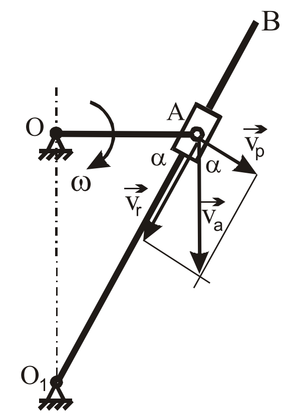
<u>ZADATAK 2.19.</u> <u>(**složeno kretanje klizača**)</u>: Mehanizam, prikazan na slici, čine pogonska poluga $OA=20cm$, poluga $O_1B=100cm$ i klizač koji je zglobno vezan za kraj A poluge OA i pomera se duž poluge O_1B. Poluga OA rotira oko nepomične ose O sa brojem obrtaja $n=60\ o/min$. Za položaj mehanizma u kome je ugao $\varphi=90^0$, naći ugaonu brzinu poluge O_1B i brzinu kretanja klizača duž poluge O_1B. Rastojanje $OO_1=a=40cm$.

<u>*Rešenje*</u>: Ugaona brzina poluge OA: $\omega=\dfrac{\pi n}{30}=\dfrac{\pi\cdot 60}{30}=2\pi=6{,}28\dfrac{rad}{s}$.

Klizač vrši složeno kretanje: relativno se kreće duž poluge O_1B i zajedno sa njom vrši prenosno obrtno kretanje oko nepomične ose kroz tačku O_1. Apsolutno kretanje klizača je obrtanje oko nepomične ose O, sa polugom OA za koju je vezan.

Apsolutna brzina tačke A je vektor normalan na pravac OA, usmeren nadole saglasno smeru ugaone brine ω i brojno je jednak:

$$v_a = OA \cdot \omega = 20 \cdot 2\pi = 20 \cdot 6{,}28 = 40\pi = 125{,}6\frac{cm}{s}.$$



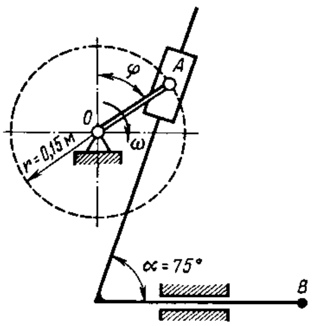
Relativna brzina klizača i tačke A na njemu usmerena je duž poluge O_1B nadole. Prenosna brzina tačke A jednaka je brzini tačke na poluzi O_1B sa kojom se u tom vremenskom trenutku poklapa tj. vektor prenosne brzine ima pravac normalan na polugu O_1B i ima intenzitet $v_p = O_1A \cdot \omega_{O1}$, gde je ω_{O1} ugaona brzina obrtanja poluge O_1B oko nepomične ose kroz tačku O_1. Vektor apsolutne brzine $\vec{v}_a$ može se razložiti na pomenute pravce vektora $\vec{v}_r$ (duž poluge) i $\vec{v}_p$ (normalno na polugu). Tako se dobija prikazani paralelogram brzina.

Za trougao OO_1A možemo pisati: $O_1A = \sqrt{(OO_1)^2 + OA^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} = \sqrt{2000} = 44{,}7cm$,

$sin\,\alpha = \dfrac{OO_1}{O_1A} = \dfrac{40}{44{,}7} = 0{,}8948;\quad cos\,\alpha = \dfrac{OA}{O_1A} = \dfrac{20}{44{,}7} = 0{,}4474$. U paralelogramu brzina je ugao između vektora $\vec{v}_a$ i $\vec{v}_p$ takođe jednak α. Zato će intenziteti prenosne i relativne brzine biti jednaki:

$$v_p = v_a\, cos\,\alpha = 125{,}6 \cdot 0{,}4474 = 56{,}2\frac{cm}{s};\quad v_r = v_a\, sin\alpha = 125{,}6 \cdot 0{,}8948 = 112{,}4\frac{cm}{s}.$$

Pošto je $v_p = O_1A \cdot \omega_{O1}$, ugaona brzina poluge biće jednaka: $\omega_{O1} = \dfrac{v_p}{O_1A} = \dfrac{56{,}2}{44{,}7} = 1{,}26\dfrac{rad}{s}$, i biće usmerena (saglasno smeru brzine $\vec{v}_p$) u smeru kazaljke na satu.

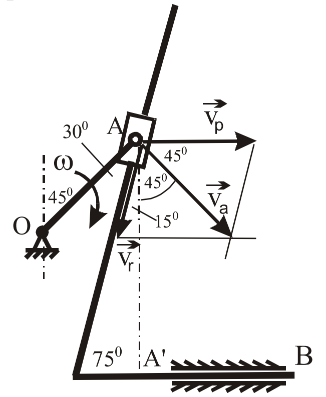


ZADATAK 2.20. (**složeno kretanje klizača**): Mehanizam, prikazan na slici, čine pogonska poluga *OA=0,15m*, ugaona poluga i klizač koji je zglobno vezan za kraj A poluge OA i pomera se duž ugaone poluge. Poluga OA rotira oko nepomične ose O sa konstantnim brojem obrtaja *n=300 o/min*. Ugaona poluga se može pomerati translatorno duž svoje horizontalne vođice. Za položaj mehanizma u kome je ugao $\varphi=45^0$, naći brzinu kretanja ugaone poluge i brzinu kretanja klizača duž poluge.

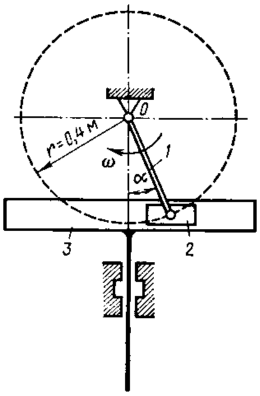
Rešenje:

Ugaona brzina poluge OA: $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{\pi \cdot 300}{30} = 10\pi = 31{,}4\dfrac{rad}{s}$.

Klizač vrši složeno kretanje: relativno se kreće duž kraka poluge AB i zajedno sa njom vrši prenosnu translaciju. Apsolutno kretanje klizača je obrtanje oko nepomične ose O, sa polugom OA za koju je vezan. Apsolutna brzina tačke A je vektor normalan na pravac OA, usmeren nadole saglasno smeru ugaone brine ω i brojno je jednak: $v_a = OA \cdot \omega = 0{,}15 \cdot 31{,}4 = 4{,}71\dfrac{m}{s}$. Relativna brzina tačke A usmerena je duž kraka ugaone poluge nadole. Prenosna brzina tačke A jednaka je brzini tačke ugaone poluge sa kojom se u tom trenutku poklapa tj. vektor prenosne brzine ima pravac paralelan horizontalnoj vođici. Vektor apsolutne brzine $\vec{v}_a$ može se razložiti na pravce vektora $\vec{v}_r$ (duž kraka poluge) i $\vec{v}_p$ (horizontalni pravac) da bi se dobio paralelogram brzina. Pošto je dati ugao $\varphi=45^0$, ugao između vektora $\vec{v}_a$ i vertikale AA' je takođe jednak 45^0, kao ugao sa paralelnim kracima (ili preko dopune uglova). Pošto je vektor prenosne brzine



$\vec{v}_p$ horizontalan i ugao između vektora $\vec{v}_p$ i $\vec{v}_a$ takođe je jednak 45^0. Ugao između vektora $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_a$ jednak je $45^0+15^0=60^0$. Intenziteti vektora prenosne i relativne brzine će biti jednaki: $v_p = v_a \cos 45^0 = 4{,}71 \cdot 0{,}707 = 3{,}33 \frac{m}{s}$; $v_r = v_a \cos 60^0 = 4{,}71 \cdot 0{,}5 = 2{,}35 \frac{m}{s}$.



ZADATAK 2.21. (**složeno kretanje klizača**): U mehanizmu krivaje sa kulisom, prikazanom na slici, kraj A krivaje 1 dužine *400mm* je zglobno vezan sa klizačem 2 koji se može pomerati duž proreza u kulisi 3, čime on dovodi kulisu u povratno translatorno kretanje. Krivaja OA rotira oko nepomične ose O sa konstantnim brojem obrtaja *n=90 o/min*. Za položaj mehanizma u kome je ugao $\alpha=30^0$, naći brzinu kulise i brzinu kretanja klizača duž kulise.

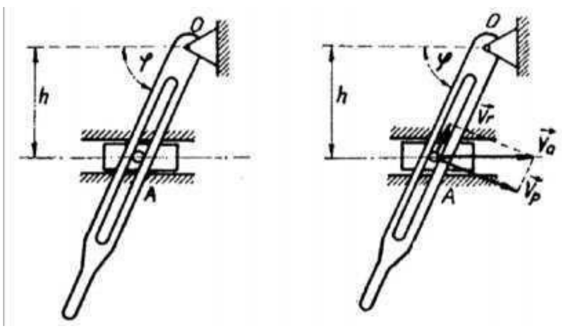
Rešenje: Ugaona brzina poluge OA: $\omega = \frac{\pi n}{30} = 3\pi \frac{rad}{s} = 9{,}4 \frac{rad}{s}$.

Apsolutna brzina tačke A (pravac normalan na OA): $v_a = 3760 \frac{mm}{s} = 3{,}76 \frac{m}{s}$.

Brzina kretanja kulise (prenosna) (smer nadole): $v_p = v_a \cos 60^0 = 1{,}88 \frac{m}{s}$.

Relativna brzina klizača (smer ulevo): $v_r = v_a \cos 30^0 = 3{,}25 \frac{m}{s}$.

ZADATAK 2.22. (**složeno kretanje klizača**):Klizač A se pomera duž vođice pomoću poluge koja se obrće oko nepokretne ose O, pri čemu je rastojanje *h=20cm*. Odrediti brzinu klizača ako je ugaona brzina poluge $\omega=5s^{-1}$ za položaj mehanizma sa uglom $\varphi=60^0$.

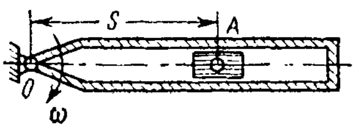


Rešenje: Rastojanje OA jednako je:

$$\frac{20}{OA} = \sin 60^0 \rightarrow OA = \frac{20}{\sin 60^0} = 23cm .$$

Prenosna brzina je brzina one tačke poluge koja je u trenutnom dodiru sa klizačem, normalna je na polugu, usmerena nadole: $v_p = OA \cdot \omega = 115 \frac{cm}{s}$. Apsolutna brzina ima pravac horizontalne vođice: $v_a = \frac{v_p}{\cos 30^0} = 133 \frac{cm}{s}$.

Relativna brzina: $v_r = v_a \cos 60^0 = 66{,}5 \frac{cm}{s}$.

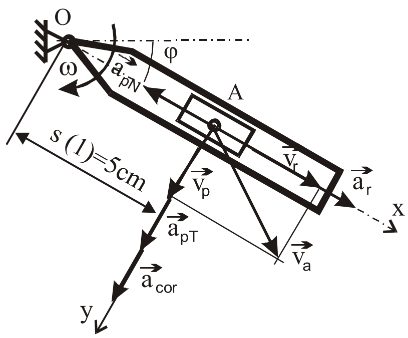


ZADATAK 2.23. (**složeno kretanje klizača**): Detalj kulisnog mehanizma sastoji se od kulise, koja se obrće oko ose O i klizača A, koji može da se kreće duž vođice u kulisi. Kulisa se obrće po zakonu $\varphi=0{,}5t^2$. Klizač se duž kulise kreće po zakonu $s=OA=2+3t^2$ (gde je vreme t u [s] a rastojanje *s* u [*cm*]). Odrediti veličine apsolutne brzine i ubrzanja klizača u trenutku $t_1=1s$.

Rešenje: Kretanje klizača se sastoji iz dva nezavisna kretanja: prenosnog kretanja kulise (obrtanje oko nepomične ose kroz tačku O) i relativnog kretanja klizača (pravolinijsko kretanje) po kulisi.

Relativno kretanje Brzina i ubrzanje u funkciji vremena:

$$v_r = \dot{s} = 0 + 3 \cdot 2t = 6t, \quad a_r = \ddot{s} = 6 \cdot 1 = 6 \frac{cm}{s^2} = const .$$



U trenutku $t_1=1s$: položaj $s(1)=2+3\cdot1^2=2+3=5cm;$ brzina i ubrzanje $v_r(1)=6\cdot1=6\dfrac{cm}{s}$, $a_r(1)=6\dfrac{cm}{s^2}$.

Prenosno kretanje

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje u funkciji vremena:

$\omega=\omega_p=\dot{\varphi}=0{,}5\cdot2t=t,\quad \varepsilon=\varepsilon_p=\ddot{\varphi}=1rad/s^2=const.$

U trenutku t_1=1s:

položaj $\varphi(1)=0{,}5\cdot1^2=0{,}5rad=0{,}5\dfrac{180}{\pi}=28{,}65^0$,

ugaona brzina i ubrzanje $\omega(1)=1\dfrac{rad}{s}$, $\varepsilon(1)=1\dfrac{rad}{s^2}$.

Prenosna brzina: $v_p=OA\cdot\omega=s(1)\cdot\omega(1)=5\cdot1=5\dfrac{cm}{s}$; prenosno tangencijalno i normalno ubrzanje:

$$a_{pT}=OA\cdot\varepsilon=s(1)\cdot\varepsilon(1)=5\cdot1=5\frac{cm}{s^2},\quad a_{pN}=OA\cdot\omega^2=s(1)\cdot[\omega(1)]^2=5\cdot1^2=5\frac{cm}{s^2}.$$

Apsolutna brzina klizača jednaka je: $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_p$, intenzitet apsolutne brzine biće jednak $v_a=\sqrt{v_p^2+v_r^2}=\sqrt{5^2+6^2}=7{,}8\dfrac{cm}{s}$, dok se pravac i smer određuju pravilom paralelograma.

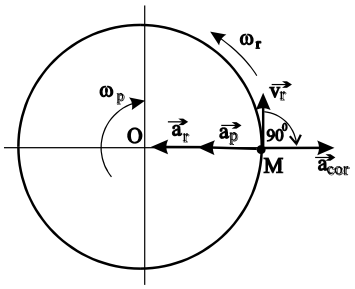
Apsolutno ubrzanje klizača jednako je: $\vec{a}_a=\vec{a}_{pN}+\vec{a}_{pT}+\vec{a}_r+\vec{a}_{cor}$.

Pošto su vektori $\vec{v}_r$ i $\vec{\omega}_p$ međusobno upravni intenzitet Koriolisovog ubrzanja biće jednak:

$a_{cor}=2\omega_p v_r=2\cdot1\cdot6=12\dfrac{cm}{s^2}$. Pravac i smer vektora $\vec{a}_{cor}$ određujemo tako što vektor $\vec{v}_r$ zaokrenemo oko svog početka za 90^0 u smeru ugaone brzine $\vec{\omega}_p$.

Projektovanjem jednačine $\vec{a}_a=\vec{a}_{pN}+\vec{a}_{pT}+\vec{a}_r+\vec{a}_{cor}$ na ose Ax i Ay dobijamo projekcije apsolutnog ubrzanja na te ose a potom i intenzitet apsolutnog ubrzanja klizača:

$$a_x=a_r-a_{pN}=6-5=1\frac{cm}{s^2},\ a_y=a_{pN}+a_{cor}=5+12=17\frac{cm}{s^2},\quad a_a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{1^2+17^2}=17{,}03\frac{cm}{s^2}.$$

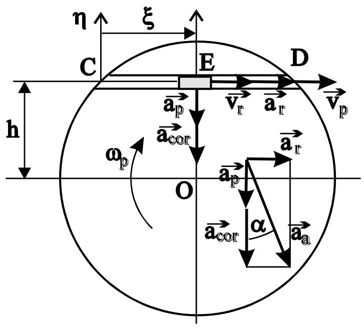


ZADATAK 2.24. (**složeno kretanje tačke**): Krug poluprečnika $R=2m$ obrće se ravnomerno u ravni oko centra O, ugaonom brzinom $\omega_p=8rad/s$. Tačka M se istovremeno kreće ravnomerno po njegovom obimu u obrnutom smeru ugaonom brzinom $\omega_r=5rad/s$. Odrediti apsolutno ubrzanje tačke M.

Rešenje: Prenosno ubrzanje ima samo normalnu komponentu, (smer ka O): $a_p=a_{pN}=R\omega_p^2=2\cdot8^2=128m/s^2$.

Relativno ubrzanje takođe ima samo normalnu komponentu, usmerenu ka O: $a_r=a_{rN}=R\omega_r^2=2\cdot5^2=50m/s^2$.

Vektor prenosne ugaone brzine upravan je na ravan crteža a samim tim i na relativnu brzinu $v_r=R\omega_r=2\cdot5=10m/s$. Veličina Koriolisovog ubrzanja: $a_{cor}=2\omega_p v_r=2\cdot8\cdot10=160m/s^2$, njegov pravac i smer dobijamo kad vektor $\vec{v}_r$ zaokrenemo za 90^0 u smeru prenosnog obrtanja ω_p. Konačno za apsolutno ubrzanje tačke M pišemo izraz: $\vec{a}_a=\vec{a}_p+\vec{a}_r+\vec{a}_{cor}$, a pošto su sva tri komponentna ubrzanja istog pravca sabiraju se algebarski, rezultujuće ubrzanje je usmereno ka centru O: $a_a=a_p+a_r-a_{cor}=128+50-160=18m/s^2$.



ZADATAK 2.25. (**složeno kretanje klizača**): Disk se okreće konstantnom ugaonom brzinom $\omega=2s^{-1}$ oko centralne ose O, upravne na ravan diska. Po pravolinijskom kanalu CD kreće se klizač po zakonu $\xi=3t^2$ (cm). Rastojanje $h=5cm$, $CD=24cm$. Odrediti brzinu i ubrzanje klizača u trenutku kada se on nađe na sredini kanala, u tački E.

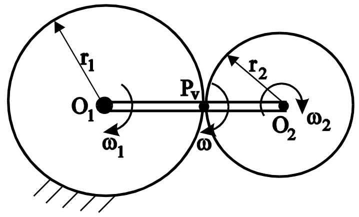
Rešenje: Koordinatni sistem $C\xi\eta$ je čvrsto vezan za disk i okreće se zajedno s njim. Kada se klizač nađe u sredini kanala $CE=\xi_E=CD/2=12cm$, pa se vreme određuje na osnovu koordinate CE: $\xi_E = 3t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{12}{3} = 4s^2, t = 2s.$

Relativna brzina i relativno ubrzanje biće jednaki: $v_r = \dot{\xi} = 6t; a_r = \ddot{\xi} = 6$, a u trenutku $t=2s$ imaće vrednosti: $v_r=12cm/s$, $a_r=6cm/s^2$ (pravci i smerovi su prikazani na slici). Prenosna brzina tačke E diska, sa kojom se klizač poklapa u posmatranom vremenskom trenutku, normalna je na poluprečnik OE i jednaka $v_p = OE \cdot \omega_p = h \cdot \omega = 10cm/s.$ Pošto je prenosna ugaona brzina konstantna, prenosno ubrzanje ima samo normalnu komponentu usmerenu ka centru O, $a_p = a_{pN} = OE \cdot \omega_p^2 = h\omega^2 = 20cm/s^2$. Vektori $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$ su kolinearni pa je apsolutna brzina klizača: $v_a=v_p+v_r=12+10=22cm/s$.

S obzirom da su vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$ upravni međusobno, radi određivanja pravca Koriolisovog ubrzanja zaokrećemo vektor $\vec{v}_r$ za 90^0 u smeru prenosnog obrtanja. Intenzitet Koriolisovog ubrzanja je: $a_{cor} = 2\omega_p v_r = 48cm/s^2$. Apsolutno ubrzanje klizača određeno je formulom: $\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$, sa intenzitetom: $a_a = \sqrt{a_r^2 + \left(a_p + a_{cor}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(20+48\right)^2} = 68{,}26cm/s^2$.

Pravac vektora apsolutnog ubrzanja: $tg\alpha = \dfrac{a_r}{a_p + a_{cor}} = \dfrac{6}{20+48} = 0{,}088235; \alpha = 5{,}04^0.$

ZADATAK 2.26. (**složeno kretanje tela**): Krivaja O_1O_2 obrće se oko ose O_1 ugaonom brzinom $\omega_1=20rad/s$. Za krivaju je čvrsto vezana osovina na koju je postavljen zupčanik poluprečnika $r_2=40mm$, spregnut sa nepomičnim zupčanikom poluprečnika $r_1=60mm$. Odrediti apsolutnu ugaonu brzinu ω zupčanika i njegovu relativnu ugaonu brzinu ω_2 prema krivaji.



Rešenje: Dodirna tačka pomičnog sa nepomičnim zupčanikom je trenutni pol za zupčanik 2, pa sledi:

$$\frac{O_1P_v}{O_2P_v} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{60}{40} \cdot 20 = 120rad/s$$

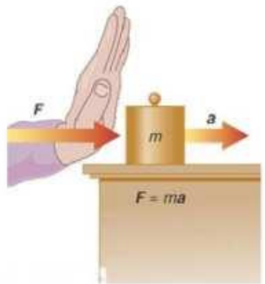
Apsolutna ugaona brzina zupčanika ima intenzitet: $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 20 + 120 = 140rad/s.$

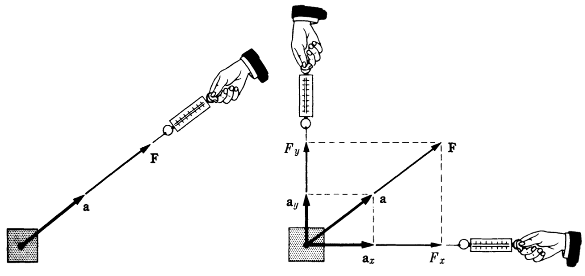
3. DINAMIKA TAČKE

U kinematici je kretanje proučavano sa geometrijskog stanovišta, ne vodeći računa o uzrocima kretanja i materijalnosti; korišćeni su pojmovi dužine i vremena. U dinamici se proučava kretanje tela ali se vodi računa o uzrocima (silama koje izazivaju kretanje) i materijalnosti tela tj. uvode se i pojmovi sile i mase. Dinamika se deli na: dinamiku tačke i dinamiku sistema.
Dinamika tačke je oblast dinamike koja proučava kretanje materijalnih tačaka. Materijalna tačka je telo zanemarljive veličine u odnosu na puteve koje prolazi.

3.1. NJUTNOVI ZAKONI

Prvi zakon - ZAKON INERCIJE: *Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja sve dok mu to stanje ne promeni neko drugo telo*. Inercija (lenjost) je težnja tela da zadrži svoje prvobitno stanje (kretanja ili mirovanja). Mera inertnosti tela je njegova masa - za telo veće mase potrebna je veća sila za promenu stanja kretanja (ili mirovanja).
Drugi zakon: *Promena kretanja je proporcionalna sili koja na telo deluje i zbiva se u pravcu dejstva* sile.

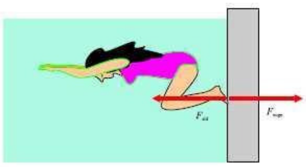




(a) (b)

Ovaj zakon se iskazuje jednačinom: $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$, ako na telo deluje sistem sila: $\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_r}$;

kada telo nije slobodno već u kontaktu sa drugim telom (vezom): $\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N}$. Ovde su: $\sum \vec{F}_i^a$ -suma aktivnih sila; $\vec{F}_N$ -reaktivna sila, $\vec{a}$ je vektor ubrzanja (istog pravca i smera kao $\vec{F}$).



Treći zakon - ZAKON DEJSTVA I PROTIVDEJSTVA: *Dejstva dvaju tela jednog na drugo uvek su jednaka i suprotno usmerena*. Po ovom zakonu važi $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$, odnosno $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, ili se može reći da je akciji (dejstvu) suprotna reakcija ili protivdejstvo (uvođeno je kao aksioma u statici). Sile $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ deluju na dva različita tela, javljaju se uvek u parovima.

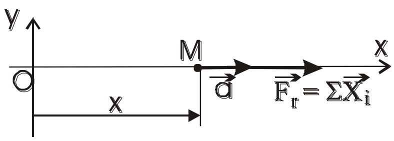
Četvrti zakon - ZAKON GRAVITACIJE: *Svako materijalno telo privlači drugo materijalno telo silom koja je direktno proporcionalna proizvodu njihovih masa a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja.* Ova privlačna sila je zanemarljivo mala ako su tela malih masa.

$\boxed{F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}}$, $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ je gravitaciona konstanta koju je odredio Kevendiš.

Dva zadatka dinamike koja se mogu postaviti i rešiti na osnovu drugog Njutnovog zakona:

1. Poznate jednačine kretanja materijalne tačke zadate mase, treba naći silu koja deluje na tačku. Zato je potrebno izvršiti diferenciranje jednačina kretanja.
2. Poznata sila (rezultanta sistema) koja deluje na materijalnu tačku zadate mase, treba naći jednačine kretanja. U ovom slučaju vrši se integracija.

3.2. PRAVOLINIJSKO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE



Linija putanje tačke je Ox osa, sila (rezultanta sila) koja deluje na materijalnu tačku mora biti pravca Ox ose: $\vec{F}_r = \sum \vec{X}_i$. Po II Njutnovom zakonu važi: $m\vec{a} = \vec{F}_r$. Projektovanjem na Ox osu dobija se: $ma_x = \sum X_i = X_r, m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = \sum X_i = X_r$.

$\Rightarrow$ diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja materijalne tačke $\boxed{m\ddot{x} = \sum X_i}$

a) SILA ZAVISI OD VREMENA ILI JE KONSTANTNA $\boxed{X_r = X_r(t) \ \vee \ X_r = const.}$

Oblik drugog izvoda (I): $\boxed{\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}}$ $\Rightarrow$ dvostruka integracija, konstante se određuju iz početnih uslova (t=0; x_0 - početni položaj; $\dot{x}_0 = v_0$ - početna brzina). Dobija se zavisnost brzine od vremena $\dot{x} = v = \dot{x}(t)$ i zavisnost položaja (kordinate x) od vremena $x=x(t)$.

b) SILA ZAVISI OD POLOŽAJA TAČKE $\boxed{X_r = X_r(x)}$

Drugi izvod se piše u obliku (II) koji omogućava razdvajanje promenljivih $\boxed{\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x}}$, $m\ddot{x} = X_r(x)$, $\quad m\dot{x}\,d\dot{x} = X_r(x)dx$, integracijom se dobija $\dot{x} = v = \dot{x}(x)$.

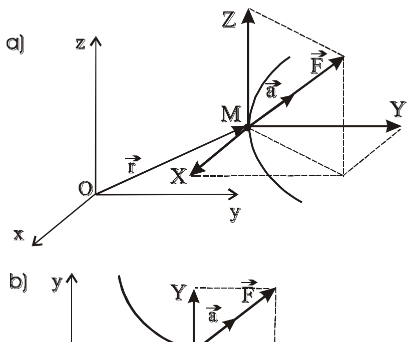
c) SILA ZAVISI OD BRZINE TAČKE $\boxed{X_r = X_r(\dot{x}) = X_r(v)}$.

Drugi izvod može da se izrazi na dva načina u zavisnosti od željenog rezultata.

(I): $m\frac{d\dot{x}}{X_r(\dot{x})} = dt$, nakon integracije $\rightarrow$ $v=v(t)$, (II): $m\frac{\dot{x}d\dot{x}}{X_r(\dot{x})} = dx$ nakon integracije $\rightarrow$ $v=v(x)$.

3.3. KRIVOLINIJSKO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE

Sila $\vec{F}$ (ili rezultanta $\vec{F}_r = X_r\vec{i} + Y_r\vec{j} + Z_r\vec{k}$,) koja deluje na materijalnu tačku (kao i ubrzanje $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ usmerena u konkavnu stranu putanje) može da zavisi od $\vec{r}$, $\vec{v}$ i t tj. položaja, brzine i vremena. Vektorska jednačina $m\vec{a} = \vec{F}_r$ se može projektovati na ose x, y i z, i na taj način se dobijaju tri diferencijalne jednačine krivolinijskog kretanja tačke:



$$\boxed{m\,\ddot{x} = \sum X_i \qquad m\,\ddot{y} = \sum Y_i \qquad m\,\ddot{z} = \sum Z_i}$$

Integracijom ovih jednačina pojaviće se 6 konstanata $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6$ koje se određuju iz početnih uslova kretanja: $t = 0$: $x_0, \dot{x}_0$; $y_0, \dot{y}_0$; $z_0, \dot{z}_0$. Dobijaju se zakoni kretanja $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$. Za kretanje u ravni projektovanjem dobijamo dve skalarne jednačine, 4 konstante a početni uslovi su $t = 0$: $x_0, \dot{x}_0$; $y_0, \dot{y}_0$; dobijaju se zakoni kretanja $x=x(t)$ i $y=y(t)$.

3.3.1. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru

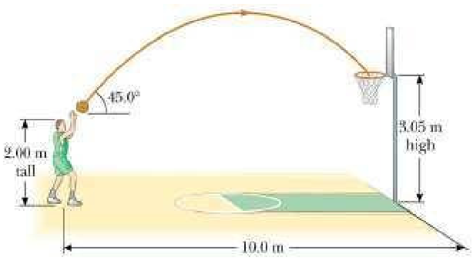
Kretanje se izvodi u vertikalnoj ravni xOy pod dejstvom sile Zemljine teže $\vec{G} = -m g \vec{j}$ sa početnim uslovima: $t = 0,\ x_0 = y_0 = 0,\ \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha,\ \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$.

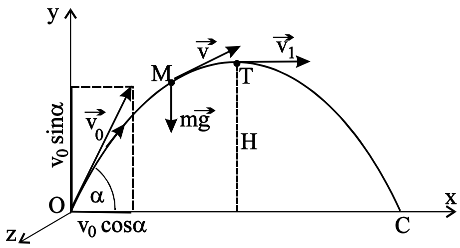
U Ox pravcu dobijamo: $m\ddot{x} = G_x = 0,\ \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = 0, \Rightarrow \dot{x} = C_1;$ (1)

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \int dx = C_1 \int dt + C_2, \Rightarrow x = C_1 t + C_2. \qquad (2)$$

Korišćenjem uslova: $t = 0, \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha,\ x_0 = 0;$ dobijaju se integracione konstante $v_0 \cos\alpha = C_1;\ 0 = C_1 0 + C_2,\ \Rightarrow\ C_2 = 0.$ Zamenom u (1) i (2) $\Rightarrow$

projekcija brzine: $\dot{x} = v_x = v_0 \cos\alpha$ i jednačina kretanja u Ox pravcu: $\boxed{\mathbf{x = v_0 t \cos\alpha.}}$ (3)





U Oy pravcu dobijamo: $m\ddot{y} = -mg,\ \ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = -g, \int d\dot{y} = -g\int dt + C_3, \dot{y} = -gt + C_3;$ (4)

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_3, \int dy = -g\int t dt + C_3 \int dt + C_4,\ \ y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4. \qquad (5)$$

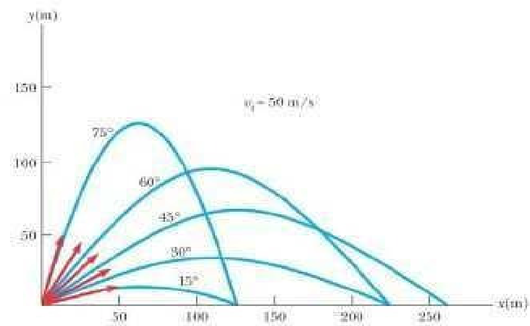
Sa početnim uslovima $t = 0, \dot{y} = v_0 \sin\alpha, y_0 = 0;$ dobijaju se konstante:

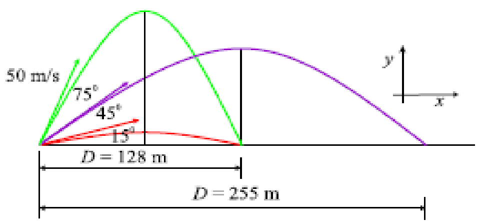
$v_0 \cdot \sin\alpha = -g \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = v_0 \sin\alpha; \qquad 0 = \frac{1}{2} g \cdot 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0.$ Dalje sledi:

projekcija brzine: $\dot{y} = v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ i jednačina kretanja u Oy pravcu: $\boxed{\mathbf{y = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2}.}$ (6)

Iz jednačina kretanja (3) i (6) sledi: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha},\ y = v_0 \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2,$

pa se dobija jednačina putanje (parabole): $\boxed{\mathbf{y = x \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}}}$.





Domet D=OC tj. presek parabole sa Ox osom: $y = x\left(\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0, \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g x_C}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0,$

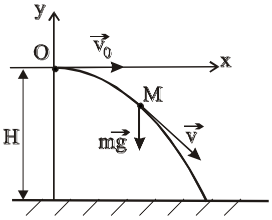
jednak je $\boxed{x_C = D = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$. Maksimalni domet ($\sin 2\alpha = 1$) dostiže se za $\alpha = 45^0$.

Visina penjanja H tj. ordinata tačke T: $v_y = \dot{y} = 0 \rightarrow v_0 \sin\alpha - g t_t = 0 \rightarrow t_T = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$$y_T = H = v_0 t_T \sin\alpha - \frac{g t_t^2}{2} = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2; \Rightarrow \boxed{y_T = H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}.$$

Najveća visina penjanja (sinα=1) dostiže se za $\alpha = 90^0$, tj. za vertikalni hitac.

Horizontalni hitac - je kretanje sa horizontalnom početnom brzinom. Iz jednačina kosog hitca smenom: $\alpha=0$ $(\cos\alpha = 1,\ \sin\alpha = 0,\ tg\alpha = 0)$ dobija se:



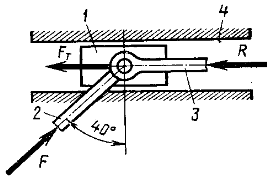
1) $x = v_0 t,\ y = -\frac{1}{2} g t^2$, jednačine kretanja tačke

2) $v_x = \dot{x} = v_0,\ v_y = \dot{y} = -gt,$ projekcije brzine;

3) $\boxed{y = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2}}$ jednačina putanje tačke.

3.4. ZADACI (II NJUTNOV ZAKON, JEDNAČINE KRETANJA)

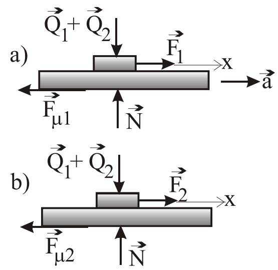
ZADATAK 3.1. (**II Njutnov zakon**): Klizač 1 mase $m=20kg$, na koga deluje pogonska poluga 2 silom $F=150N$, kreće se u vođicama 4. Odrediti ubrzanje klizača ako je sila trenja u vođicama jednaka $F_T=40N$ a sila otpora sa strane klipnjače jednaka je $R=100N$.



Rešenje: Prema II Njutnovom zakonu možemo pisati: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_T$ (sila G=mg nije prikazana jer ima pravac upravan na pravac kretanja klizača). Ako pretpostavimo da je smer ubrzanja udesno, projektovanjem jednačine dobijamo: $ma = F\,sin 40^0 - R - F_T$.

$$a = \frac{1}{m}\left(F\,sin 40^0 - R - F_T\right) = \frac{1}{20}(150 \cdot 0{,}6428 - 100 - 40) = -2{,}18\frac{m}{s^2}.\ \text{(usporenje)}$$

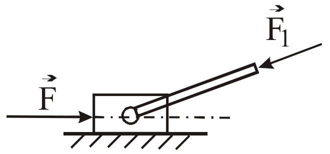
ZADATAK 3.2. (**II Njutnov zakon**): Za jednu rendisaljku su dati podaci: težina radnog stola $Q_1=7kN$, težina predmeta koji se obrađuje $Q_2=3kN$, brzina kretanja radnog stola $v=0,5m/s$, vreme potrebno za postizanje radne brzine $t=0,5s$. Odrediti brojnu vrednost sile F_1, potrebne za postizanje radne brzine ako je kretanje jednako ubrzano sa koeficijentom trenja $\mu_1=0,14$. Zatim odrediti brojnu vrednost sile F_2 potrebne za dalje, ravnomerno kretanje sa koeficijentom trenja $\mu_2=0,07$.



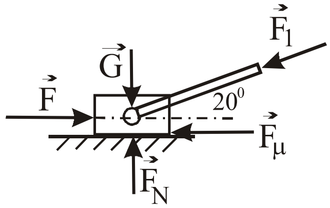
Rešenje: a) Za jednako ubrzano kretanje (sa $v_0=0$) važi: $v = v_0 + at$ $\rightarrow v = 0 + at \rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1\frac{m}{s^2}$. Ukupna masa radnog stola i predmeta jednaka je: $m = \frac{Q_1 + Q_2}{g} = \frac{7000 + 3000}{9{,}81} = 1019{,}4kg$. Normalna reakcija jednaka je $N = Q_1 + Q_2$ a sila trenja $F_{\mu 1} = \mu_1 N = \mu_1(Q_1 + Q_2) = 0{,}14 \cdot 10000 = 1400N$. Prema II Njutnovom zakonu biće:

$$ma = F_1 - F_{\mu 1} \rightarrow F_1 = ma + F_{\mu 1} = 1019{,}4 \cdot 1 + 1400 = 2419{,}4N = 2{,}42kN.$$

b) Pri ravnomernom kretanju će sila trenja biti jednaka $F_{\mu 2} = \mu_2 N = \mu_2(Q_1 + Q_2) = 0{,}07 \cdot 10000 = 700N$. Sada se može pisati statički uslov ravnoteže: $\sum X_i = 0;\quad F_2 - F_{\mu 2} = 0 \rightarrow F_2 = F_{\mu 2} = 700N = 0{,}7kN$.



ZADATAK 3.3. (**II Njutnov zakon**): Klip mase $m=10kg$ kreće se udesno a koeficijent trenja između klipa i horizontalne površine iznosi 0,3. Kretanju se suprotstavlja sila $F_1=1,19kN$ u poluzi, pod uglom 20^0. Izračunati veličinu sile F kojom treba da se deluje na klip da bi se ostvarilo ubrzanje klipa $a=20m/s^2$.



Rešenje: $F_1=1,19kN=1190N$

Primenom II Njutnovog zakona dobija se:

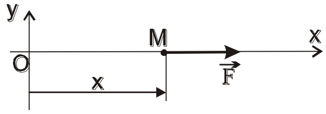
$$m\ddot{y} = -mg + F_N - F_1 \sin 20^0 \rightarrow 0 = -10 \cdot 9,81 + F_N - 1190 \cdot 0,342$$

$$F_N = 98,1 + 407 = 505,1N \qquad F_\mu = \mu F_N = 0,3 \cdot 505,1 = 151,53N$$

$$m\ddot{x} = ma = F - F_\mu - F_1 \cos 20^0 \rightarrow 10 \cdot 20 = F - 151,53 - 1190 \cdot 0,939$$

$$200 = F - 1269 \quad \rightarrow \quad F = 1269 + 200 = 1469N = 1,469kN$$

ZADATAK 3.4. (**Jednačina pravolinijskog kretanja**): Materijalna tačka M, mase $m=5kg$, kreće se duž horizontalne Ox ose pod dejstvom sile $\vec{F} = 15t\,\vec{i}$. Naći zakon kretanja tačke. Početni uslovi su: $t_o = 0,\ x_o = 0\ ,\ \dot{x}_o = v_o = 0.$

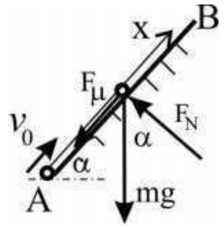


Rešenje: $m\ddot{x} = 15t,\ d\dot{x} = \frac{15}{m} t dt,\ \int_0^v dv = 3\int_0^t t dt,\ v = \dot{x} = \frac{3}{2} t^2$ -brzina.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} t^2,\ \int_0^x dx = \frac{3}{2}\int_0^t t^2 dt \Rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{2}$$ -jednačina kretanja tačke.

ZADATAK 3.5. (**Jednačina pravolinijskog kretanja**): Materijalna tačka M, mase $m=2kg$, počinje kretanje iz tačke A, početnom brzinom $v_0 = 8m/s$, uz hrapavu strmu ravan CB (nagiba $\alpha=60^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,35$). Napisati jednačinu kretanja tačke po strmoj ravni.

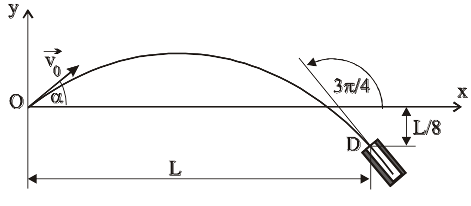
Rešenje:



Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja uz strmu ravan glasi: $m\ddot{x} = -mg\,sin\,\alpha - F_\mu$, gde je $F_\mu = \mu F_N = \mu mg\,cos\,\alpha$, pa sledi $m\ddot{x} = -mg\,sin\,\alpha - \mu mg\,cos\,\alpha,\quad \ddot{x} = -g\,sin\,\alpha - \mu\,g\,cos\,\alpha,$ a nakon zamene brojnih vrednosti dobija se $\ddot{x} = -9,81 \cdot sin 60^0 - 0,35 \cdot 9,81 \cdot cos 60^0 \rightarrow \boxed{\ddot{x} = -10,2}$.

Sledi dvostruka integracija, pri čemu su početni uslovi $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0 = 8m/s$:

$\ddot{x} = -10,2 \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -10,2 \rightarrow \int d\dot{x} = -10,2\int dt \rightarrow \dot{x} = -10,2t + C_1$. Za t=0 i $\dot{x}_0 = 8m/s$ dobija se C_1=8. Dalje je: $\dot{x} = -10,2t + 8 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -10,2t + 8 \rightarrow \int dx = \int(-10,2t + 8)dt \rightarrow x = -10,2\frac{t^2}{2} + 8t + C_2$ pa je za $t=0,\ x_0=0$ i C_2=0. Konačno jednačina kretanja uz strmu ravan CB glasi $\boxed{x = -5,1t^2 + 8t}$.



ZADATAK 3.6. (**Kosi hitac**): Pod kojim uglom α i kojom početnom brzinom v_0 treba baciti tačku M, mase m, pa da ona u tački D uđe u cev, koja zaklapa ugao $\beta = 3\pi/4 = 135^0$ sa Ox osom? Tačka D se nalazi na udaljenju $L=16m$ i na visini $L/8=2m$ ispod Ox ose. Otpor vazduha zanemariti.

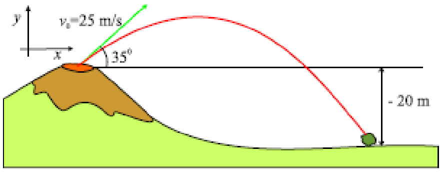
Rešenje: Zadate koordinate tačke D $x_D = L = 16,\ y_D = -L/8 = -2$, moraju zadovoljiti jednačinu putanje kosog hitca; tangenta na putanju u tački D mora se poklapati sa pravcem ose cevi, pa sledi:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \quad -2 = 16tg\alpha - \frac{g\cdot 16^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$y' = tg\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}, \quad -1 = tg\alpha - \frac{g\cdot 16}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Množenjem druge jednačine sa *(*-8) i sabiranjem sa prvom jednačinom dobija se $tg\alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

Iz druge jednačine, posle zamene nađenog ugla, sledi $v_0^2 = 140{,}1$.



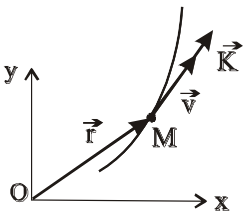
ZADATAK 3.7. (**Kosi hitac**): Vulkan je izbacio veliku stenu početnom brzinom *25m/s*, pod uglom *35⁰* u odnosu na horozontalu. Stena pada na površinu Zemlje koja je na *20m* manjoj nadmorskoj visini od vrha kratera. Odrediti vreme potrebno steni da pređe ovaj put.

Rešenje: Zamenom podataka za koordinatu tačke, ugao i početnu brzinu u jednačinu kretanja u *y* pravcu sledi:

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad -20 = 25t\cdot\sin 35^0 - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81t^2 \quad \rightarrow -20 = 14{,}34t - 4{,}9t^2$$

$$4{,}9t^2 - 14{,}34t - 20 = 0 \;\rightarrow\; t_{1,2} = \frac{14{,}34 \pm \sqrt{14{,}34^2 - 4\cdot 4{,}9\cdot(-20)}}{2\cdot 4{,}9} = \frac{14{,}34 \pm 24{,}45}{9{,}8}, \quad t_1 = 3{,}96s$$

3.5. OPŠTI ZAKONI DINAMIKE TAČKE



Primenom ovih zakona se mogu rešavati zadaci dinamike bez integraljenja, ali se ovi zakoni ne mogu primenjivati u svim slučajevima.

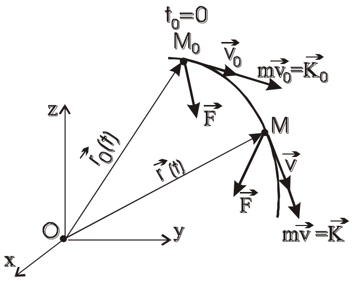
Količina kretanja materijalne tačke $\boxed{\vec{K} = m\vec{v}}$ je vektorska veličina; ima pravac i smer vektora brzine a intenzitet je jednak *K=mv*. Vektor $\vec{K}$ se može razložiti na komponente: $\vec{K} = \vec{K}_x + \vec{K}_y$ i projektovati na ose: $K_x = m\dot{x}$, $K_y = m\dot{y}$. Jedinica mere je *Ns*.

Kinetička energija tačke $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$ je skalarna veličina, uvek pozitivna, jedinica *Nm=J*.

Impuls sile $\boxed{d\vec{I} = \vec{F}dt}$ je vektor, ima pravac i smer sile, to je karakteristika dejstva sile u određenom vremenskom intervalu. Jedinica mere je *Ns*. Impuls sile za konačan vremenski interval biće $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} d\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$. Izračunavanje impulsa sile je moguće ako je sila konstantna kada je $\boxed{I=Ft}$ ili ako je sila funkcija vremena.

3.5.1. Zakon o promeni količine kretanja

Iz II Njutnovog zakona $m\vec{a} = \vec{F}$ sledi: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$, $\frac{d\vec{K}}{dt} = \dot{\vec{K}} = \vec{F}$, $d\vec{K} = \sum \vec{F}_i dt = \sum d\vec{I}_i$



a integracijom se dobija $\boxed{\vec{K}-\vec{K}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0=\sum\vec{I}_i}$

<u>zakon o promeni količine kretanja:</u> *promena količine kretanja tačke za vremenski interval jednaka je vektorskom zbiru impulsa svih sila koje deluju na tačku a za isti interval.*

Projektovanjem: $K_x-K_{0x}=\sum I_{ix};\ K_y-K_{0y}=\sum I_{iy}.$

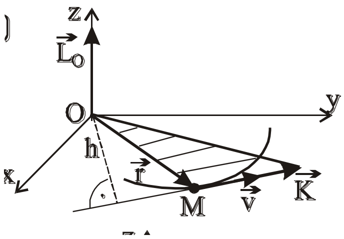
<u>*Zakon o održanju količine kretanja*:</u> kada je sila (ili rezultanta) jednaka nuli kretanje je jednoliko tj. $\sum\vec{F}_i=0 \quad\rightarrow$

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=0\Rightarrow\vec{K}=m\vec{v}=const,\Rightarrow\vec{v}=const.$$

3.5.2. <u>Zakon o promeni momenta količine kretanja</u>

<u>Moment količine kretanja</u> materijalne tačke $\vec{L}_O$ za tačku O (analogno momentu sile za tačku $\vec{M}_O^{\vec{F}}=\vec{r}\,x\,\vec{F}$) je vektorski proizvod vektora položaja $\vec{r}$ i vektora količine kretanja $\vec{K}=m\vec{v}$:

$$\vec{M}_O^{\vec{K}}=\vec{L}_O=\vec{r}x\vec{K}=\vec{r}xm\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z}\end{vmatrix}\rightarrow\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}xm\vec{v})=\vec{v}x\vec{K}+\vec{r}xm\vec{a}\,,\quad \vec{v}\,x\,\vec{K}=\vec{v}\,x\,m\vec{v}=0\,,$$



$m\vec{a}=\vec{F}\,,\ \frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{r}x\vec{F}=\vec{M}_O^{\vec{F}}.$ Konačno važi: $\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum\vec{M}_O^{\vec{F}_i}}$

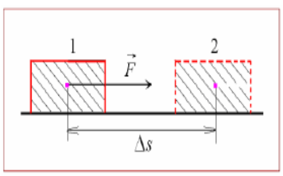
<u>Zakon o promeni momenta količine kretanja:</u> *izvod momenta količine kretanja, u odnosu na nepokretni pol, po vremenu jednak je momentu sile, u odnosu na isti pol.*

Projektovanjem se dobija: $\frac{dL_x}{dt}=\sum M_x^{\vec{F}_i},\frac{dL_y}{dt}=\sum M_y^{\vec{F}_i}$.

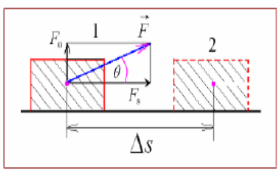
<u>*Zakon o održanju momenta količine kretanja*</u>: $\frac{d\vec{L}_O}{dt}=0,\Rightarrow\vec{L}_O=const.$, tj. $\frac{dL_z}{dt}=0,\Rightarrow L_z=const.,..$

3.5.3. <u>Rad sile. Snaga</u>

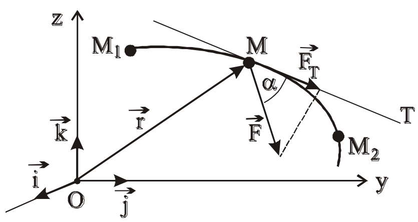
Sila vrši rad ako menja svoju napadnu tačku. <u>Elementarni rad</u> sile jednak je: $d\mathbf{A}=\vec{F}\cdot d\vec{r}$, tj. $\boxed{d\mathbf{A}=Fds\cos\alpha=F_T ds.}$ <u>Jedinica za rad</u> *1Nm=1J.* Pošto su vektori sile i pomeranja jednaki $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k},\ d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k};$ elementarni rad ima oblik: $d\mathbf{A}=Xdx+Ydy+Zdz.$



A=*F·Δs*



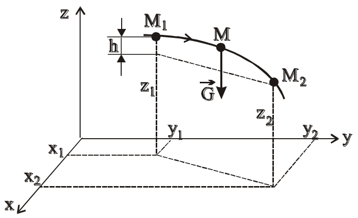
A=*F$_s$·Δs*



<u>Zavisno od ugla α</u> između vektora pomeranja i vektora sile, rad može biti pozitivan (ako je ugao α oštar), jednak nuli (sila upravna na pravac pomeranja) i negativan (ako je ugao α tup).

<u>Ukupni rad sile</u> na putu s, odnosno putu M_1M_2: $\mathbf{A}_{(M_1M_2)}=\int_{(M_1)}^{(M_2)}(Xdx+Ydy+Zdz).$

<u>Snaga</u> P je rad izvršen u jedinici vremena $\boxed{P = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = M \cdot \omega}$, snaga je skalarni proizvod vektora sile i brzine, ili momenta sile i ugaone brzine. <u>Jedinica za snagu</u> *1W=1J/s*.



<u>a) Rad sile Zemljine teže</u>

$\vec{G} = -G\vec{k};\ G_x = 0, G_y = 0, G_z = -G$,

$$\mathbf{A} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (Xdx + Ydy + Zdz) \rightarrow \mathbf{A} = Gh = mgh.$$

Ako je tačka M_1 ispod $M_2 \Rightarrow \mathbf{A}= -Gh= -mgh$.

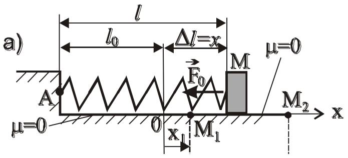
Opšti izraz za rad sile Zemljine teže $\boxed{\mathbf{A}= \pm Gh= \pm mgh.}$

Rad sile teže je pozitivan ako tačka ide sa višeg na niži nivo, a negativan je ako tačka ide sa nižeg na viši nivo. Rad sile teže ne zavisi od dužine puta ni od oblika putanje po kojoj se tačka kreće, već samo od visinske razlike. Sile koje imaju takvo svojstvo nazivaju se *konzervativne* sile.

<u>b) Rad elastične sile opruge</u>

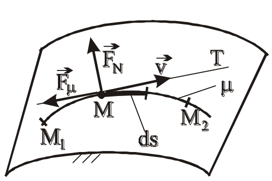
Sila opruge: $F_o = c|\Delta l| = c|x|$. Krutost opruge c je brojno jednaka sili potrebnoj da izduži (sabije) oprugu za jedinicu dužine. Sila F_0 nije konstantna, usmerena je uvek tako da vrati tačku M u ravnotežni položaj. Elementarni rad sile opruge jednak je:

$$d\mathbf{A} = F_0 dx = -cxdx \Rightarrow \mathbf{A} = \int_{M_1}^{M_2} d\mathbf{A} = -c\int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2).$$



Rad sile opruge je negativan kada se opruga udaljava od ravnotežnog položaja O a pozitivan kada se približava položaju O. Rad sile opruge za pomeranje kraja opruge od ravnotežnog ($x_1=0$) do nekog konačnog položaja $x_2=f$ jednak je: $\boxed{\mathbf{A} = \pm\frac{1}{2}cf^2}$

<u>c) Rad sile trenja</u>

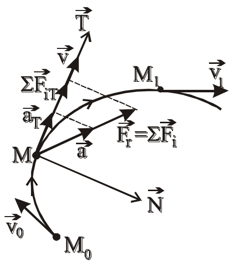


Sila trenja se pojavljuje kada se tačka kreće po hrapavoj podlozi, ima karakteristike: intenzitet $\boxed{F_\mu= -\mu F_N}$ (μ-koeficijent trenja klizanja), pravac tangente na podlogu, smer suprotan smeru kretanja tačke.

Rad sile trenja je uvek negativan i računa se: $\mathbf{A} = \int_{M_1}^{M_2} F_\mu ds = -\int_{M_1}^{M_2} \mu F_N ds.$

<u>Rad konstantne sila trenja</u> jednak je: $\boxed{\mathbf{A} = -\mu F_N \cdot s = -F_\mu \cdot s,}$ gde je s pređeni put (luk M_1M_2) .

3.5.4. <u>Zakon o promeni kinetičke energije tačke</u>



Iz II Njutnovog zakona $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$; projektovanjem na pravac tangente:

$$ma_T = \sum F_{iT}\ ;\ a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v. \quad mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{iT} \Rightarrow$$

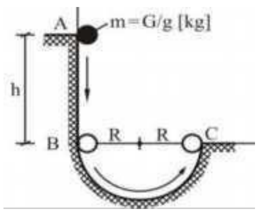
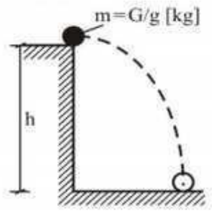
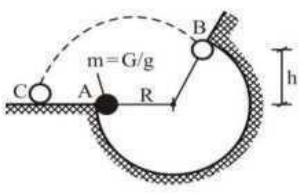
$$m\int_{v_0}^{v_1} vdv = \sum \int_{M_0}^{M_1} F_{iT}ds, \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \int_{M_0}^{M_1} d\mathbf{A}_i, \quad \boxed{E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathbf{A}_i.}$$

<u>Zakon o promeni kinetičke energije tačke:</u> *priraštaj kinetičke energije pri pomeranju jednak je algebarskom zbiru radova sila koje na tačku deluju, na tom pomeranju.*

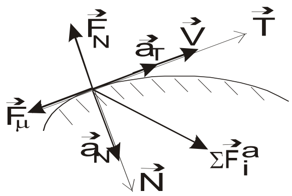
$\sum \mathbf{A}_i$ uključuje radove aktivnih sila i reaktivnih sila koje rad vrše (npr. sila trenja).

3.6. PRINUDNO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE

Primeri kretanja

-po prinudnoj putanji:	- po slobodnoj putanji:	-po prinudnoj i po slobodnoj putanji:
		

Kada se tačka kreće slobodno ima tri stepena slobode, njene koordinate zavise samo od vremena. Tela koja ograničavaju slobodno kretanje (smanjuju broj stepeni slobode) su *mehaničke veze*, a kretanje tačke po vezama je *prinudno* kretanje. Veze mogu biti oblika linije ili površine. U slučaju kretanja po površini broj stepeni slobode je 2, za kretanje po liniji 1.

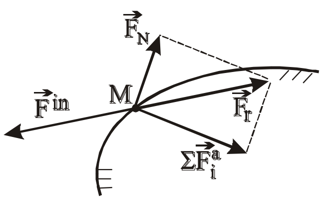


Na tačku koja se kreće po vezi, deluju aktivne sile i sile veze, pa važi:

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_R}$$

$\rightarrow\ ma_T = \sum F_{iT}^a + F_\mu$ (za glatku vezu F_μ=0); $ma_N = \sum F_{iN}^a + F_N$

3.6.1. Dalamberov princip za materijalnu tačku



Slaganjem aktivnih i reaktivnih sila dobija se rezultanta $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N$. Vektor $\vec{a}$ ima isti pravac i smer kao rezultanta $\vec{F}_r$. Tačka M se može fiktivno uravnotežiti ako se sili $\vec{F}_r$ suprotstavi sila istog pravca i intenziteta a suprotnog smera - sila inercije $\vec{F}^{in} = -\vec{F}_r$. Pošto je po II Njutnovom zakonu $\vec{F}_r = m\vec{a} \rightarrow$ sila inercije biće jednaka $\boxed{\vec{F}^{in} = -m\vec{a}}$.

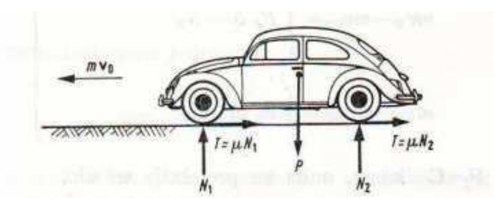
Inercijalna sila se može projektovati na tangentu i normalu: $F_T^{in} = -ma_T = -m\dfrac{dv}{dt},\ F_N^{in} = -m\dfrac{v^2}{R_k}$.

Jednačina fiktivne ravnoteže za tačku M: $\vec{F}_r + \vec{F}^{in} = 0,\ \boxed{\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N + \vec{F}^{in} = 0.}$

Dalamberov princip za tačku: V*ektorski zbir svih aktivnih, reaktivnih i inercijalnih sila, koje deluju na materijalnu tačku, jednak je nuli.* Dalamberov princip omogućuje da se pri rešavanju dinamičkih zadataka postave jednačine kretanja u obliku statičkih jednačina ravnoteže.

3.7. ZADACI IZ OPŠTIH ZAKONA DINAMIKE TAČKE

ZADATAK 3.8. (**Zakon o promeni količine kretanja**): Automobil je naglo zakočio, pri brzini *v_0=144 km/h*, tako da počne da se kliza po kolovozu bez obrtanja točkova. Koeficijent trenja između kolovoza i guma na točkovima je *μ=0,1* (u slučaju vlažnog kolovoza). Odrediti vreme i put kočenja.

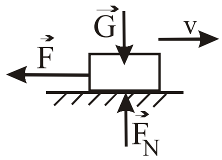


Rešenje: Pri zaustavljanju je *v=0* a početna brzina je $v_0 = 144\dfrac{km}{h} = 144\dfrac{1000m}{3600s} = 40\dfrac{m}{s}$. Na automobil deluju: sila težine *P=mg*, reakcije N_1 i N_2 i sila trenja $T = \mu N_1 + \mu N_2 = \mu(N_1 + N_2) = \mu P = \mu mg$. Po zakonu o promeni količine kretanja biće: $K_x - K_{0x} = \sum I_{ix} \rightarrow mv - mv_0 = -T \cdot t \rightarrow$

$0 - mv_0 = -\mu mg \cdot t$, $mv_0 = \mu mg \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{v_0}{\mu g} = \dfrac{40}{0{,}1 \cdot 9{,}81} = 40{,}77s$. Prema II Njutnovom zakonu je:

$ma = \sum X_i = -T = -\mu mg$, pa je $a = -\dfrac{\mu mg}{m} = -\mu g = -0{,}1 \cdot 9{,}81 = -0{,}981 \dfrac{m}{s^2}$ (usporenje). Pređeni put

pri jednako usporenom kretanju: $s = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{0{,}981 \cdot 40{,}77^2}{2} = 815m.$



ZADATAK 3.9. (**Zakon o promeni količine kretanja**): Teretu mase $m=6kg$ koji leži na horizontalnoj ravni, saopšti se udarcem početna brzina $v_0=10m/s^2$. Nastalo kretanje koči se konstantnom silom $F=3N$. Odrediti posle kog vremena će se teret zaustaviti i koliki put će preći do zaustavljanja.

Rešenje: Po zakonu o promeni količine kretanja: $\vec{K} - \vec{K}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum \vec{I}_i$, sledi:

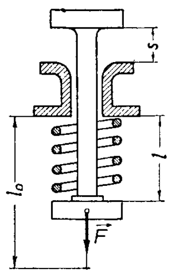
$$K_x - K_{0x} = \sum I_{ix} \rightarrow mv_1 - mv_0 = \sum I_{ix}, \quad v_1 = 0, \quad \sum I_{ix} = -F \cdot t_1 = -3t_1$$

$$0 - 6 \cdot 10 = -3t_1 \quad \rightarrow \quad 60 = 3t_1 \quad \rightarrow \quad t_1 = 20s$$

Iz zakona o promeni kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \dfrac{1}{2}mv_1^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathbf{A}_i$, gde je $\mathbf{A} = -Fs$ sledi:

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -Fs \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}6 \cdot 10^2 = -3 \cdot s \quad \rightarrow \quad 300 = 3s \quad \rightarrow \quad s = 100m.$$

ZADATAK 3.10. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): Opruga ventila ima dužinu $l_0=6cm$, u nenapregnutom stanju. Kada je ventil potpuno otvoren, dužina opruge iznosi $l=4cm$, a visina podizanja ventila $s=0{,}6cm$. Krutost opruge je $c=10N/m$ a težina ventila $G=0{,}4N$. Zanemarujući dejstvo sile teže i otpora kretanju ventila odrediti brzinu u trenutku zatvaranja.

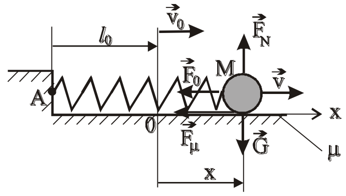


Rešenje: Zakon promene kinetičke ener.: $E_{k1} - E_{k0} = \dfrac{1}{2}mv_1^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathbf{A}_i$. (a).

Početna brzina $v_0 = 0$, masa ventila je $m = G/g = 4/9{,}81 = 0{,}0408kg = 40{,}8g$.

U ovom slučaju rad vrši samo elastična sila opruge $\vec{F}$: $d\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2)$. Početno rastojanje od ravnotežnog položaja je: $x_1= l_0 - l = 6-4=2cm=0{,}02m$; krajnje rastojanje $x_2= l_0 - (l+s)=6-(4+0{,}6)=1{,}4cm=0{,}014m$. Zamenom ovih veličina u izraz (a) dobićemo:

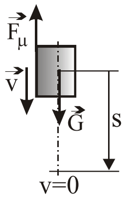
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}c\left(x_1^2 - x_2^2\right) \rightarrow mv_1^2 = c\left(x_1^2 - x_2^2\right) \rightarrow v_1^2 = \frac{c}{m}\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \frac{10}{0{,}0408}\left(0{,}02^2 - 0{,}014^2\right) = 0{,}05 \rightarrow v_1 = \sqrt{0{,}05} = 0{,}22\frac{m}{s}.$$



ZADATAK 3.11. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): Kuglica M, mase $m=2kg$, prikačena je za slobodni kraj opruge krutosti $c=10N/m$. Kuglica leži na horizontalnoj hrapavoj ravni koeficijenta trenja $\mu=0{,}25$. U ravnotežnom (nenapregnutom) položaju O kuglici je saopštena horizontalna početna brzina $v_0=1m/s$. Naći brzinu kuglice v u funkciji pomeranja x.

Rešenje: Može se primeniti zakon o promeni kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$. Rad na pomeranju x imaju elastična sila opruge $\mathbf{A} = -\dfrac{c}{2}x^2$ i sila trenja $F_\mu = \mu F_N = \mu mg$ po obrascu $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu x = -\mu mg \cdot x$; rad nemaju sile upravne na pravac pomeranja (G, F_N).

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = -\frac{c}{2}x^2 - \mu mgx, \quad \frac{2v^2}{2} - \frac{2 \cdot 1^2}{2} = -\frac{10}{2}x^2 - 0{,}25 \cdot 2 \cdot 9{,}81x, \quad v^2 = 1 - 5x^2 - 4{,}9x$$

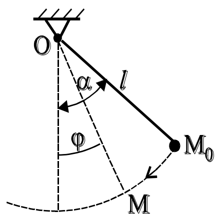


ZADATAK 3.12. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): U rudarskom oknu kreće se naniže dizalica težine *G=60kN*, brzinom *v=12m/s*. Odrediti silu trenja između dizalice i vođica, koju mora da razvije uređaj za hvatanje da bi se dizalica, posle kidanja užeta koje je pridržava, zaustavila nakon *s=10m*. Pretpostaviti da je sila trenja konstantna.

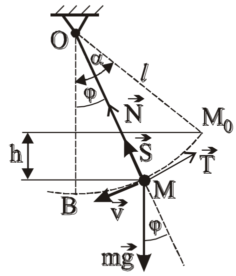
Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije dobijamo:

$$E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i;\quad 0-\frac{1}{2}mv^2=-F_\mu s+Gs\rightarrow F_\mu s=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2+Gs\rightarrow F_\mu=\frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{v^2}{s}+G=104kN.$$

ZADATAK 3.13. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): Kuglica M, mase *m=3kg*, vezana je za laki nerastegljivi konac dužine *l=1,5m*. Drugi kraj konca je vezan za nepokretnu tačku O (matematičko klatno). Klatno je otklonjeno od vertikalnog (ravnotežnog) položaja za ugao $\alpha=60^0$ i pušteno bez početne brzine. Naći brzinu kuglice u proizvoljnom položaju pod uglom φ. Uzeti da je $g\cong 10m/s^2$. Koliko iznosi brzina i sila u koncu u najnižem položaju kuglice (tačka B).



Rešenje: Najpre treba naći brzinu tačke u proizvoljnom položaju, koristeći zakon promene kinetičke energije $E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i$., pri čemu je $v_0=0$:



$$\frac{mv^2}{2}-0=mgh,\ mv^2=2mgh;\ h=l\cos\varphi-l\cos\alpha=l(\cos\varphi-\cos\alpha);$$

$$mv^2=2mgl(\cos\varphi-\cos\alpha),\Rightarrow v^2=2gl(\cos\varphi-\cos\alpha).$$

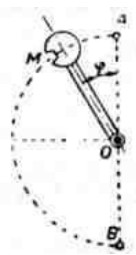
$$v^2=2\cdot 10\cdot 1{,}5(\cos\varphi-\cos 60^0)=30(\cos\varphi-0{,}866).$$

Koristeći Dalamberov princip (projekcija na pravac normale) dobija se:

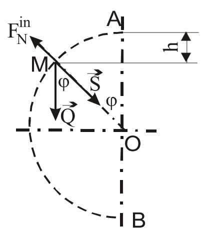
$$S-mg\cos\varphi-F_N^{in}=0\rightarrow ma_N=S-mg\cos\varphi,\ \frac{mv^2}{l}=S-mg\cos\varphi.\Rightarrow S=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\varphi$$

U najnižem položaju je φ=0 ($\cos\varphi=1$) pa sledi: $v^2=30(\cos 0^0-0{,}866)=30(1-0{,}866)=4{,}02.$

Sila u koncu jednaka je: $S=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\varphi=\frac{3\cdot 4{,}02}{1{,}5}+3\cdot 10\cdot 1=38{,}04N$



ZADATAK 3.14. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): U Šarpijevom priboru za ispitivanje, čelični liv težine *Q=200N* učvršćen je za kraj poluge *OM=981cm*, koja se može obrtati oko nepomične horizontalne ose O. Liv pada iz najvišeg položaja A beskrajno malom početnom brzinom. Odrediti najveći pritisak štapa na osovinu. Masu štapa zanemariti.



Rešenje: Ako primenimo zakon o promeni kinetičke energije za početni A ($v_0=0$) i proizvoljni položaj M pod uglom φ dobijamo:

$$E_{k1}-E_{k0}=mgh\rightarrow\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=mgh/\cdot\frac{2}{m}\rightarrow$$

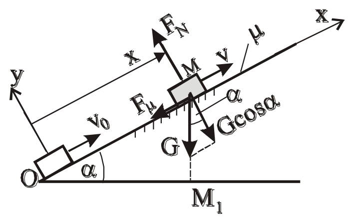
$$v^2=2gh;\quad h=OM(1-\cos\varphi)\rightarrow v^2=2g\cdot OM(1-\cos\varphi)$$

Na liv deluje sila u poluzi $\vec{S}$, sila težine $\vec{Q}$ i inercijalna sila $\vec{F}^{in}=-m\vec{a}$.
Projektovanjem Dalamberove jednačine $\sum\vec{F}_i^a+\vec{F}_N+\vec{F}^{in}=0$ na pravac normale dobija se

$$S+Q\cos\varphi-F_N^{in}=0,\ F_N^{in}=\frac{m}{R}v^2=\frac{Q}{g}\frac{1}{OM}2g\cdot OM(1-\cos\varphi)=2Q(1-\cos\varphi),$$

pa je sila u poluzi: $S = -Q\cos\varphi + F_N^{in} = -Q\cos\varphi + 2Q(1-\cos\varphi) = Q(2-3\cos\varphi)$.
Za $\varphi = \pi \rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow S_{max} = Q(2+3) = 5Q = 1kN$.

ZADATAK 3.15. (**Zakon o promeni kinetičke energije**):Telo M, mase $m=8kg$ i malih dimenzija, kreće se uz hrapavu strmu ravan nagiba $\alpha=45^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,25$. Telo M je krenulo iz podnožja strme ravni sa početnom brzinom $v_0=6m/s$. Naći brzinu v tela nakon pređenog puta $x=2m$. Zatim izračunati pređeni put $x_1=s$ do zaustavljanja tela.



Rešenje: Na telo deluju sila težine G, sila trenja F_μ i reakcija podloge F_N (normalna na pravac kretanja pa je njen rad jednak nuli). Sila trenja je jednaka
$F_\mu = \mu F_N = \mu G\cos\alpha = \mu mg\cos\alpha = 0,25\cdot 8\cdot 9,81\cdot 0,707 = 13,9N$. Rad sile trenja jednak je $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu x$.
Visinska razlika: $h = x\cdot \sin\alpha = 2\cdot \sin 45^0 = 2\cdot 0,707 = 1,414m$ a rad sile težine $\mathbf{A}_G = -mgh$.

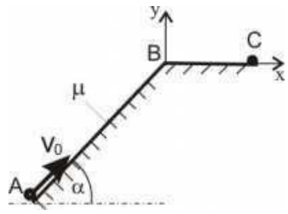
Zakon promene kinetičke energije: $E_k - E_{ko} = \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_\mu; \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = -mgh - F_\mu x,$

$$\frac{8v^2}{2} - \frac{8\cdot 6^2}{2} = -8\cdot 9,81\cdot 1,414 - 13,9\cdot 2 \Rightarrow 4v^2 = 144 - 110,97 - 27,8 = 5,23 \Rightarrow v^2 = 1,3 \Rightarrow v = 1,14\frac{m}{s}$$

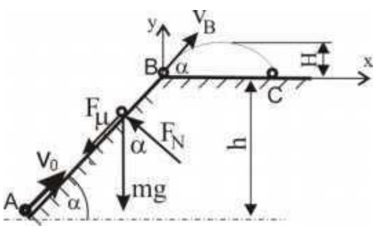
Na kraju kretanja tela brzina je jednaka nuli tj. $v=0$: $h_1 = s\cdot\sin\alpha = s\cdot\sin 45^0 = 0,707s$

$$E_k - E_{ko} = \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_\mu \Rightarrow 0 - \frac{mv_o^2}{2} = -mgh_1 - F_\mu s \Rightarrow 0 - \frac{8\cdot 6^2}{2} = -8\cdot 9,81\cdot 0,707s - 13,9s$$
$$-144 = -55,48s - 13,9s \Rightarrow 144 = 69,38s \Rightarrow s = 2,07m$$

ZADATAK 3.16. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac**): Telo M, mase $m=4kg$, kreće se uz hrapavu strmu ravan visine $h=3,464m$, nagiba $\alpha=60^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,2$. Telo M je krenulo iz podnožja strme ravni sa početnom brzinom $v_0=15m/s$. Naći brzinu v_B tela na vrhu strme ravni. Iz tačke B nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku C. Izračunati domet i visinu do koje će se tačka popeti u toku svog slobodnog kretanja. Uzeti da je $g \cong 10m/s^2$. Koliko bi iznosila brzina i visina penjanja ako je strma ravan glatka?



Rešenje: Sila trenja: $F_\mu = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha = 0,2\cdot 4\cdot 10\cdot 0,5 = 4N$. Data je visina $h=3,464m \Rightarrow$ dužina strme ravni $\frac{h}{s} = \sin\alpha \rightarrow \quad s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{3,464}{\sin 60^0} = \frac{3,464}{0,866} = 4m$.



Rad sile trenja jednak je $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu s$, rad sile težine $\mathbf{A}_G = -mgh$.
Primenjujemo zakon promene kinetičke energije:

$$E_k - E_{ko} = \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_\mu; \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = -mgh - F_\mu s,$$

$$\frac{4v_B^2}{2} - \frac{4\cdot 15^2}{2} = -4\cdot 10\cdot 3,464 - 4\cdot 4 \Rightarrow$$

$$2v_B^2 = 450 - 138,56 - 16 = 295,44 \Rightarrow \quad v_B^2 = 147,72 \Rightarrow v_B = 12,15\frac{m}{s}$$

Domet kosog hitca jednak je: $d = BC = \frac{v_B^2\sin(2\cdot 60^0)}{g} = \frac{147,72\cdot 0,866}{9,81} = 13,04m.$

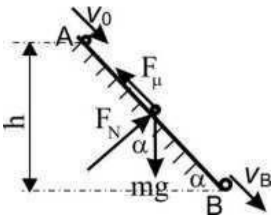
Visina penjanja kosog hica: $H=\dfrac{v_B^2\sin^2\alpha}{2g}=\dfrac{147{,}72\cdot 0{,}866^2}{2\cdot 10}=5{,}54m.$

U slučaju glatke strme ravni biće $F_\mu=0$ pa sledi:

$$\frac{4v_B^2}{2}-\frac{4\cdot 15^2}{2}=-4\cdot 10\cdot 3{,}464\ \Rightarrow 2v_B^2=450-138{,}56=311{,}44\Rightarrow v_B^2=155{,}72;\qquad H=5{,}84m.$$

ZADATAK 3.17. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): Telo mase $m=8\ kg$ kreće se niz hrapavu strmu ravan nagiba $\alpha=45°$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=\frac{1}{6}$. Naći brzinu tela nakon pređenog puta $s=AB=4{,}24$ m ako je početna brzina $v_0^2=20\frac{m^2}{s^2}$ (uzeti da je $g\cong 10m/s^2$).

Rešenje:



Na telo deluju sila težine G, sila trenja F_μ i reakcija podloge F_N (normalna na pravac kretanja). Sila trenja je jednaka: $\boxed{F_\mu=\mu F_N}$, dok intenzitet normalne komponente sile trenja na strmoj ravni iznosi: $F_N=mgcos\alpha=8\cdot 10\cdot cos45°=\boxed{56{,}56\ N}$.

Prema slici, u zavisnosti od pređenog puta s i nagiba strme ravni α, visinska razlika h iznosi:

$$\boxed{s=AB=\frac{h}{\sin\alpha}\rightarrow h=s\cdot\sin\alpha=4{,}24\cdot 0{,}707=3m}$$

Primenom zakona promene kinetičke energije između položaja A i B odredićemo brzinu tela u tački B,v_B: $\boxed{E_{K1}-E_{K0}=\sum A_i}$ tj. $\boxed{E_{KB}-E_{KA}=A_{mg}+A_{F_\mu}\ ...(1)}$

$$E_{KB}=\frac{mv_B^2}{2}=\frac{8\cdot v_B^2}{2}=4\cdot v_B^2\ ...-\text{kinetička energija tela u položaju } B\ \left(kg\frac{m^2}{s^2}=J\right)$$

$$E_{KA}=\frac{mv_0^2}{2}=\frac{8\cdot 20}{2}=80\ J-\text{kinetička energija tela u položaju } A$$

Rad sile zemljine teže je pozitivan kada se telo kreće sa višeg prema nižem nivou, na visinskoj razlici h, tj. kada se telo kreće niz strmu ravan, u suprotnom je negativan:

$$A_{mg}=mgh=8\cdot 10\cdot 3=240\ J$$

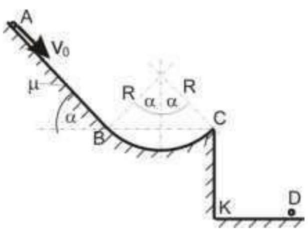
Rad sile trenja je uvek negativan: $A_{F_\mu}=-\mu F_N s=-\frac{1}{6}\cdot 56{,}56\cdot 4{,}24=-40\ J$

Iz zakona promene kinetičke energije (jednačina (1), određujemo brzinu tela u tački B:

$$4v_B^2-80=240-40$$

$$4v_B^2=200+80\rightarrow v_B^2=70\rightarrow v_B=\sqrt{70}=\boxed{8{,}37\ \frac{m}{s}}$$

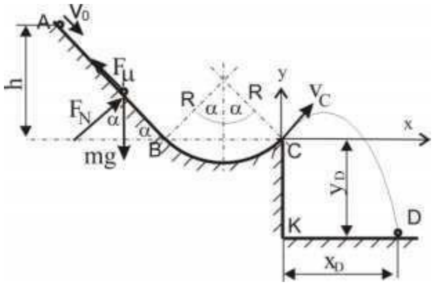
ZADATAK 3.18. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac**): Telo M, mase $m=10kg$, kreće se niz hrapavu strmu ravan dužine $AB=s=8m$, nagiba $\alpha=30^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0{,}25$. Telo M je krenulo iz tačke A početnom brzinom $v_0=5m/s$. Dalje se kreće po glatkoj polukružnoj stazi ($R=2m$) do tačke C, pa nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku D ($g\cong 10m/s^2$, visina $CK=3m$). Izračunati rastojanje KD.



Rešenje:

Sila trenja je jednaka: $F_\mu=\mu F_N=\mu mg\cos\alpha=0{,}25\cdot 10\cdot 10\cdot 0{,}866=21{,}65N.$

Visina strme ravni: $\frac{h}{s} = sin\alpha \rightarrow h = s \cdot sin30^0 = 8 \cdot 0,5 = 4m$



Zakon promene kinetičke energije možemo primeniti između položaja C i A, jer su brzine v_B i v_C međusobno jednake pošto na putu između njih nema trenja (pa je $\mathbf{A}_\mu = 0$) a nema ni visinske razlike (pa je $\mathbf{A}_G = 0$):

Rad sile trenja između položaja A i C jednak je $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu s$, rad sile težine $\mathbf{A}_G = +mgh$.

$$E_{kC} - E_{ko} = \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_\mu; \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = +mgh - F_\mu s,$$

$$\frac{10v_C^2}{2} - \frac{10 \cdot 5^2}{2} = +10 \cdot 10 \cdot 4 - 21,56 \cdot 8 \Rightarrow \ 5v_C^2 = 125 + 400 - 173,2 = 351,8 \Rightarrow \ v_C^2 = 70,36 \Rightarrow v_C = 8,4\frac{m}{s}$$

Kosi hitac: početna brzina je $v_C^2 = 70,36$ a početni ugao je $30^0 \rightarrow tg\alpha = 0,577; \quad cos\alpha = 0,866$ pa je

jednačina parabole kosog hitca: $y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_C^2 cos^2\alpha} = 0,577x - \frac{10x^2}{2 \cdot 70,36 \cdot 0,75} = 0,577x - 0,095x^2$.

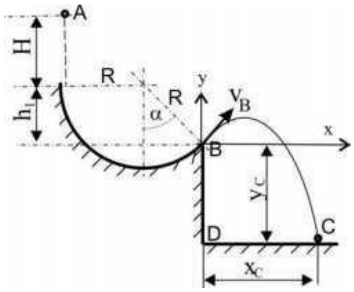
Koordinate tačke D $y_D = -3m, \ x_D = ?$ moraju zadovoljavati jednačinu putanje pa sledi:

$$y_D = 0,577x_D - 0,095x_D^2 \quad \rightarrow \quad -3 = 0,577x_D - 0,095x_D^2 \rightarrow \quad 0,095x_D^2 - 0,577x_D - 3 = 0$$

Rešenja ove jednačine su: $x_{1,2} = \frac{0,577 \pm \sqrt{0,577^2 - 4 \cdot 0,095 \cdot (-3)}}{2 \cdot 0,095} \rightarrow x_1 = 9,4m \ \ i \ \ x_2 = -3,35m$

Prvo rešenje $x_1 = 9,4m$ je realno rešenje jednačine.

ZADATAK 3.19. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac**): Materijalna tačka čija masa iznosi *m = 10kg* započinje kretanje iz tačke A na visini *H = 3 m*, bez početne brzine. Tačka se dalje kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika *R = 2 m*, gde je ugao *α = 60°*. Po napuštanju kružne staze tačka nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha se zanemaruje) i pada na horizontalnu podlogu u tački C (visina *DB = 3,75 m*). Odrediti brzinu tačke u položaju B i rastojanje BC. Uzeti da je g ≅ 10 m/s^2.



Rešenje: Da bi smo odredili brzinu materijalne tačke u položaju B, primenićemo zakon promene kinetičke energije između položaja A i B. Kako materijalna tačka započinje kretanje iz položaja A bez početne brzine (v_0= 0), kinetička energija u položaju A jednaka je nuli: E_{KA}= 0. Takođe podloga po kojoj se kreće materijalna tačka je glatka, tj. ne javlja se sila trenja, pa je i rad sile trenja ($\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$) jednak nuli, tako da se javlja samo rad sile zemljine teže $\mathbb{A}_{mg} = mg(H + h_1)$, koji je u ovom slučaju pozitivan.

Zakon promene kinetičke energije glasi:

$$E_{KB} - E_{KA} = \sum \mathbb{A}_i \quad \text{tj.} \quad E_{KB} - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg} + \mathbb{A}_{F_\mu} \ ...(1)$$

Sa slike visinska razlika (H+h_1) između položaja A i B iznosi:

$h_1 = Rcos\alpha = 2 \cdot cos60° = 2 \cdot 0,5 = 1 \ m$ pa je $H + h_1 = 3 + 1 = 4 \ m$

$E_{KB} = \frac{mv_B^2}{2} = 5v_B^2 -$ kinetička energija materijalne tačke u položaju B $\mathbb{A}_{mg} = mg(H + h_1) = 10 \cdot 10 \cdot 4 = 400 \ J$ $E_{KA} = 0; \ \mathbb{A}_{F_\mu} = 0;$	$E_{KB} - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg}$ $\rightarrow 5v_B^2 - 0 = 400$ $v_B^2 = 80 \rightarrow v_B = 8,94 \ \frac{m}{s}$ Brzina materijalne tačke u položaju B

Kosi hitac: Početna brzina $v_B^2 = 80\frac{m^2}{s^2}$, a početni ugao je $60° \rightarrow tg60° = \sqrt{3} = 1{,}73$

$cos60° = 0{,}5 \rightarrow cos^2 60° = 0{,}25$, pa je jednačina parabole kosog hitca: $\boxed{y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_B^2 cos^2\alpha}}$

$$y = 1{,}73x - \frac{10x^2}{2 \cdot 80 \cdot 0{,}25} \rightarrow y = 1{,}73x - 0{,}25x^2$$

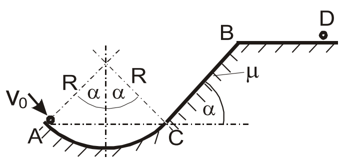
Koordinate tačke C, (sa slike $y_C = -3{,}75$ m; $x_C = ?$) moraju zadovoljavati jednačinu putanje, pa sledi:
$y_C = 1{,}73x - 0{,}25x^2$

$$-3{,}75 = 1{,}73x - 0{,}25x^2 \rightarrow 0{,}25x^2 - 1{,}73x - 3{,}75 = 0$$

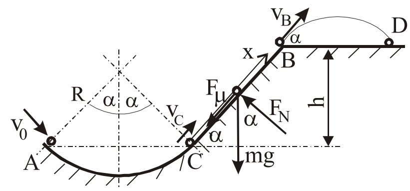
$$x_{1,2} = \frac{1{,}73 \pm \sqrt{1{,}73^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-3{,}75)}}{2 \cdot 0{,}25} = \frac{1{,}73 \pm 2{,}6}{0{,}5}$$

$x_1 = 8{,}66\ m;\ x_2 = -1{,}74\ m \Rightarrow \boxed{DC = 8{,}66\ m}$ – prvo rešenje je realno rešenje jednačine.

ZADATAK 3.20. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac, Dalamberov princip**):
Materijalna tačka M, mase $m=2kg$, počinje kretanje iz tačke A, početnom brzinom $v_0 = 8m/s$, po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R=1m$ do tačke C, a zatim uz hrapavu strmu ravan CB (visine $h=2m$, nagiba $\alpha=60^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0{,}35$) do tačke B. Iz tačke B nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku D. Odrediti rastojanje BD i reakciju F_{NC} u tački C.



Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i C, pošto nema visinske razlike $(\mathbf{A}_{mg} = 0)$ a kružna staza je glatka $(\mathbf{A}_{F_\mu} = 0)$, brzina u položaju C će imati istu vrednost kao početna brzina, tj. $v_C = v_0 = 8m/s$.



Da bi smo odredili brzinu v_B primenićemo zakon promene kinetičke energije između položaja C i B. Prvo određujemo silu trenja i dužinu strme ravni $CB=s$:
$F_N = mg\cos\alpha,\quad F_\mu = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha = 0{,}35 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 3{,}43N,$

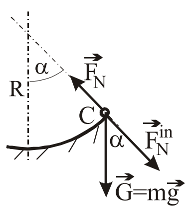
$$\frac{h}{s} = sin\,\alpha \rightarrow s = CB = \frac{h}{sin\,\alpha} = \frac{2}{sin\,60^0} = 2{,}3m.$$

Rad sile trenja između položaja C i B jednak je $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu s$, rad sile težine $\mathbf{A}_G = -mgh$.

$$E_{kB} - E_{kC} = \mathbf{A}_{mg} + \mathbf{A}_{F_\mu} \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -mgh - F_\mu s\,.$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 8^2 = -2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 - 3{,}43 \cdot 2{,}3 \rightarrow v_B^2 = 64 - 39{,}24 - 7{,}9 = 16{,}86 \rightarrow \quad v_B = \sqrt{16{,}86} = 4{,}1\frac{m}{s}.$$

Od tačke B sledi kosi hitac, sa početnom brzinom $v_B = 4{,}1m/s$, pod uglom 60^0.

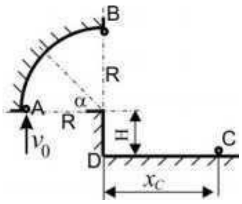


Domet kosog hitca jednak je: $d = BD = \frac{v_B^2\, sin\left(2 \cdot 60^0\right)}{g} = \frac{16{,}86 \cdot 0{,}866}{9{,}81} = 1{,}49m.$

Normalnu reakciju u tački C, na kraju polukružne staze određujemo primenom Dalamberovog principa: $F_N^{in} = \frac{m}{R}v_C^2 = \frac{2}{1}8^2 = 128N$, $F_N - F_N^{in} - mg\cos\alpha = 0$,

$$F_N = F_N^{in} + mg\cos\alpha = 128 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 137{,}8N.$$

ZADATAK 3.21. (**Zakon o promeni kinetičke energ., horizontalni hitac, Dalamberov princip**): Materijalna tačka mase $m = 6\ kg$ započinje kretanje iz tačke A, početnom brzinom v_0=14,49 m/s. Tačka se kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 6\ m$. Po napuštanju kružne staze, u položaju B, tačka nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha se zanemaruje) i pada na horizontalnu podlogu u tački C (visina $H = 2\ m$). Odrediti brzinu tačke u položaju B i rastojanje x_C. Odrediti normalnu reakciju podloge u položaju određenim uglom $\alpha = 30°$. Uzeti da je g≅ 10 m/s^2.



Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i B, pošto je podloga po kojoj se kreće materijalna tačka glatka, rad sile trenja je jednak nuli, $\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$, izračunaćemo brzinu materijalne tačke u položaju B:

$E_{KB} = \frac{mv_B^2}{2} = 3v_B^2$ $E_{KA} = \frac{mv_0^2}{2} = 630\ J$ $\mathbb{A}_{mg} = -mgR = -360\ J$ $\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$	$E_{KB} - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg}$ $3v_B^2 - 630 = -360 \rightarrow 3v_B^2 = 270$ $\rightarrow v_B^2 = 90 \Longrightarrow \boxed{v_B = 9{,}5\ \frac{m}{s}}$ Brzina tačke u položaj B

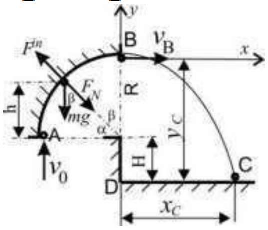
Horizontalni hitac: Početna brzina je $v_B^2 = 90\frac{m^2}{s^2}$, a ugao je 0°, tako da jednačina putanje horizontalnog hica glasi: $\boxed{y = -\frac{gx^2}{2v_B^2}}$ $\rightarrow$ $y = -\frac{10 \cdot x^2}{2 \cdot 90} \rightarrow y = -\frac{x^2}{18}$

Koordinate tačke C moraju zadovoljavati jednačinu putanje:

$$y_C = -(R + H) = -8\ m \Longrightarrow -8 = -\frac{x^2}{18} \Longrightarrow x_C^2 = 18 \cdot 8 = 144 \Longrightarrow x_C = 12\ m$$

Da bi smo odredili normalnu reakciju podloge u položaju koji je određen uglom α = 30°, prvo primenjujemo zakon promene kinetičke energije između početnog i položaja određenog uglom α, odakle se dobija brzina v: $E_K - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg}$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh = -mgRsin\alpha \Longrightarrow 3v^2 - 630 = -6 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 0{,}5 \Longrightarrow v^2 = 150\frac{m^2}{s^2}$$



Primenom Dalamberovog principa (projekcija na pravac normale), određujemo normalnu reakciju podloge:

$$F_N^{in} = m\frac{v^2}{R} = 6 \cdot \frac{150}{6} = 150\ N, \text{ugao } \beta = 60°$$

$$F_N + mgcos60° - F_N^{in} = 0 \Longrightarrow F_N = F_N^{in} - mgcos60° = 150 - 6 \cdot 10 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{F_N = 120\ N}$$

ZADATAK 3.22. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): Materijalna tačka mase $m = 12\ kg$ započinje kretanje iz tačke A početnom brzinom $v_0 = 2\ m/s$. Tačka se kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 8\ m$ do položaja B određenim uglom $\alpha = 30°$. Odrediti brzinu tačke u položaju B. Odrediti normalnu reakciju podloge u tom položaju.

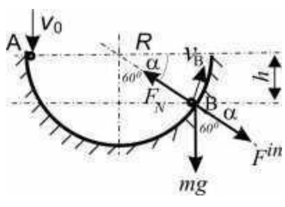
Rešenje: Da bi smo odredili brzinu materijalne tačke u položaju B, primenićemo zakon promene kinetičke energije između položaja A i B: $E_{KB} - E_{KA} = \sum \mathbb{A}_i$

Sa slike sledi da je visinska razlika između položaja A i B:

$$\frac{h}{R} = cos60° \rightarrow h = Rcos60°$$

Rad sile zemljine teže je u ovom slučaju pozitivan i iznosi:

$$\mathbb{A}_{mg} = mgh = mg(Rcos60°) = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 480\ J$$



dok je rad sile trenja jednak nuli (jer je površina glatka): $\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$.

Kinetička energija materijalne tačke u početnom položaju A: $E_{KA} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{12 \cdot 2^2}{2} = 24\ J$

Kinetička energija materijalne tačke u položaju B: $E_{KB} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{12v_B^2}{2} = 6v_B^2$

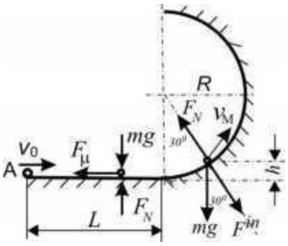
$$6v_B^2 - 24 = 480 \Longrightarrow 6v_B^2 = 504 \Longrightarrow v_B^2 = 84\frac{m^2}{s^2} \Longrightarrow v_B = 9\ \frac{m}{s}$$

Primenom Dalamberovog principa (projekcija na pravac normale), određujemo normalnu reakciju:

$$F_N^{in} = m\frac{v_B^2}{R} = 12 \cdot \frac{84}{8} = 126\ N \quad \rightarrow \quad F_N - F_N^{in} - mgcos60° = 0$$

$$F_N - 126 - 12 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{F_N = 186\ N}$$

ZADATAK 3.23. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): Telo mase $m=2kg$, je krenulo iz tačke A početnom brzinom $v_0=5m/s$ i kreće se po hrapavoj horizontalnoj ravni dužine $AB=L=1m$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=1/4=0{,}25$. Dalje se kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 1\ m$ do položaja M određenim uglom $\alpha = 30°$. Odrediti brzinu u tački M, kao i normalnu komponentu podloge ($g \cong 10m/s^2$).



Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i M, izračunaćemo brzinu materijalne tačke u položaju M:

$$E_{KM} - E_{KA} = \sum \mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{mg} + \mathbb{A}_{F_\mu} \ldots (1)$$

Rad sile zemljine teže je u ovom slučaju negativan, jer se telo kreće sa nižeg prema višem položaju, na visinskoj razlici h: $\mathbb{A}_{mg} = -mgh$

Sa slike je: $\frac{OE}{OM} = cos\varphi \Longrightarrow OE = Rcos\varphi$

$$h = OB - OE = R - Rcos\varphi = R(1 - cos\varphi) = 1(1 - cos30°) \Longrightarrow h = 0{,}134\ m$$

$$\mathbb{A}_{mg} = -mgR(1 - cos\varphi) = -2 \cdot 10 \cdot 0{,}134 = -2{,}68\ J$$

Rad sile trenja je uvek negativan (jedino je jednak nuli kada je podloga glatka), i iznosi, ako je normalna komponenta sile trenja na horizontalnoj podlozi: $F_N = mg \Longrightarrow \mathbb{A}_{F_\mu} = -\mu F_N L$

$$\mathbb{A}_{F_\mu} = -\mu mgL = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1 = -5\ J$$

Kinetička energija u položaju M: $E_{KM} = \frac{mv^2}{2}$, u položaju A: $E_{KA} = \frac{mv_0^2}{2}$

Iz jednačine (1), zakona o promeni kinetičke energije, sledi:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgR(1 - cos\varphi) - \mu mgL \Big/ \cdot \frac{m}{2} \quad \rightarrow \quad v^2 - v_0^2 = -2gR(1 - cos\varphi) - 2\mu gL$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - cos\varphi) - 2\mu gL = v_0^2 - 2gR - 2gRcos\varphi - 2\mu gL$$

$$v^2 = 25 - 2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot cos\varphi - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad v^2 = 25 - 20 + 20cos\varphi - 5$$

$$v^2 = 20cos\varphi = 20 \cdot cos30° = 17{,}32\frac{m^2}{s^2} \Longrightarrow v = 4{,}2\ \frac{m}{s}$$

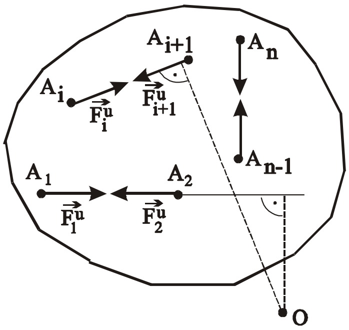
Primenom Dalamberovog principa, određujemo normalnu reakciju podloge, tj. najveći pritisak tela na podlogu. Projektovanjem Dalamberove jednačine $\sum \overrightarrow{F_i^a} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F^{in}} = 0$ na pravac normale N, dobija se:

$$\boxed{\vec{G} + \overrightarrow{F_R} + \overrightarrow{F^{in}} = 0} \rightarrow F_N - F^{in} - mgcos\varphi = 0$$

$$|F^{in}| = ma = ma_N = m\frac{v^2}{R} = 2 \cdot \frac{17{,}32}{1} = 34{,}64\ N \quad \rightarrow \quad F_N - m\frac{v^2}{R} - mgcos\varphi = 0$$

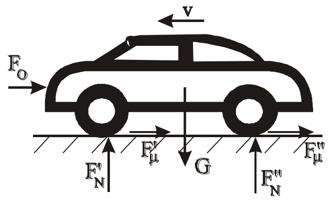
$$F_N = m\frac{v^2}{R} + mgcos\varphi = 2 \cdot \frac{17{,}32}{1} + 2 \cdot 10 \cdot cos30° = 34{,}64 + 17{,}32 \quad \rightarrow \quad F_N = 52\ N$$

4. DINAMIKA SISTEMA. DINAMIKA TELA



Mehanički sistem materijalnih tačaka (ili tela) je skup tačaka (ili tela) između kojih vladaju mehaničke sile (tj. koje se podvrgavaju Njutnovim zakonima), tako da položaj i kretanje svake tačke zavisi od položaja i kretanja ostalih tačaka sistema. Npr. čvrsto telo, Sunčev sistem, automobil, itd. Sile koje deluju na tačke (ili tela) sistema mogu se podeliti na spoljašnje i unutrašnje. <u>Spoljašnje sile</u> deluju na sistem od strane tačaka koje ne pripadaju sistemu - $\vec{F}_i^s$) a <u>unutrašnje sile</u> deluju od drugih tačaka sistema - $\vec{F}_i^u$ i uvek se javljaju u parovima.

Na primeru automobila na slici:



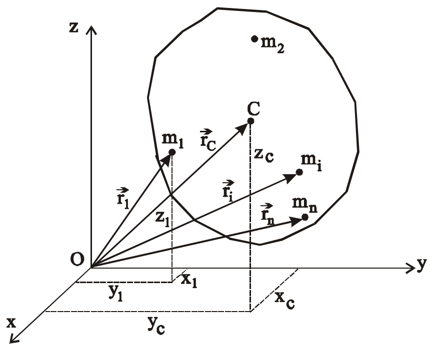
Sile $\vec{F}'_N, \vec{F}''_N, \vec{F}'_\mu, \vec{F}''_\mu$ su spoljašnje sile, jer su posledice dejstva podloge koja nije obuhvaćena posmatranim sistemom. Unutrašnje sile sistema (automobila) su sila pritiska gasova na klip motora, sile pritiska klipova na radilicu, sile trenja na osovinama točkova itd.

<u>Svojstva unutrašnjih sila</u>:

1) Geometrijski zbir svih unutrašnjih sila jednak je nuli $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u = 0$;

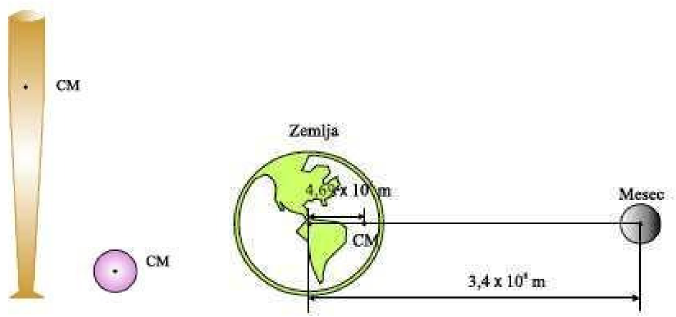
2) Geometrijski zbir momenata ovih sila za tačku (osu) jednak je nuli, $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_x^{\vec{F}_i^u} = 0$.

4.1. <u>MASA SISTEMA I SREDIŠTE (CENTAR) MASA</u>



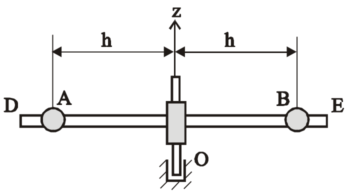
<u>Masa sistema</u> $\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i}$ jednaka je aritmetičkom zbiru masa svih tačaka (ili tela) sistema. <u>Središte masa</u> ili centar inercije sistema je tačka čiji je vektor položaja: $\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$. Projektovanjem na ose Dekartovog koordinatnog sistema dobijamo tri skalarne jednačine:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i.$$

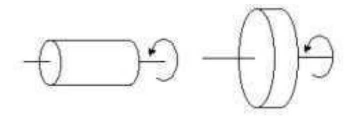


Centar mase krutog tela, u homogenom polju Zemljine teže poklapa se sa težištem. Položaj centra mase krutog tela se ne menja u odnosu na tačke tela; ako se tačke sistema pomeraju jedna u odnosu na drugu, položaj centra masa se menja u toku vremena. Na slici su prikazani centri masa nekih tela i sistema.

4.2. MOMENTI INERCIJE TELA U ODNOSU NA OSU ROTACIJE

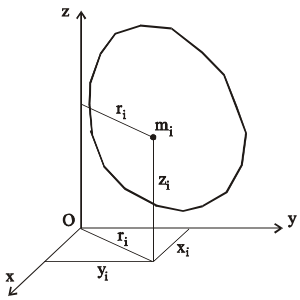


Položaj centra masa ne karakteriše u potpunosti raspored masa sistema. Npr. pri promeni rastojanja *h* od ose *Oz* (na slici), položaj centra masa će ostati nepromenjen ali će raspored masa biti drugačiji, što će uticati na brže ili sporije obrtanje oko ose *Oz*. Dakle, kod obrtnog kretanja tela za opisivanje njegove inertnosti treba znati ne samo masu tela već i kako je masa raspoređena.



Moment inercije tela (sistema), za neku osu *Oz*, je skalarna veličina koja predstavlja zbir proizvoda masa svih tačaka tela i kvadrata njihovih rastojanja od te ose:

$\boxed{J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,}$ za kontinualnu raspodelu: $J_z = \int_V r^2 dm$

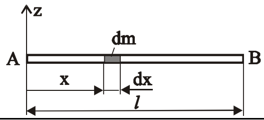
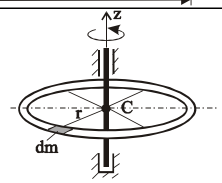
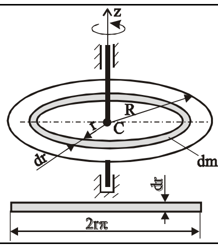
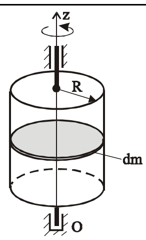
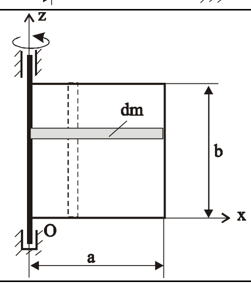


Pri obrtnom kretanju J_z ima ekvivalentnu ulogu kao masa pri translaciji, tj. J_z je mera inertnosti tela pri rotaciji (ako su mase bliže osi, J_z je manji pa rotacija duže traje i obrnuto).

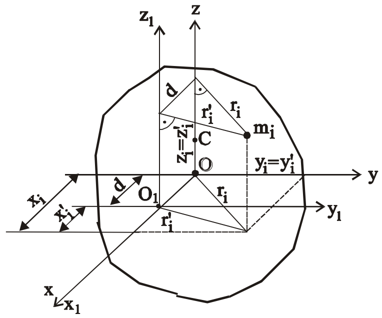
Sa slike je $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, $\Rightarrow J_z = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$.

Radijus (poluprečnik) inercije tela mase M, $\boxed{i_z^2 = \frac{J_z}{M}}$, jednak je rastojanju od ose *Oz* tačke tela, u koju treba smestiti ukupnu masu tela, da bi moment inercije te tačke bio jednak momentu inercije čitavog tela $\boxed{J_z = i_z^2 M}$. Koristi se kod tela složenog oblika.

Momenti inercije pojedinih homogenih tela:

Tanki pravolinijski štap $\boxed{J_z = \frac{Ml^2}{3}.}$	
Tanki ravni kružni prsten $\boxed{J_z = Mr^2}$	
Kružna ploča (disk, kotur) Valjak $\boxed{J_z = \frac{MR^2}{2}.}$	 
Pravougaona ploča: $\boxed{J_z = \frac{Ma^2}{3}}$ $\boxed{J_x = \frac{Mb^2}{3}}$	

MOMENTI INERCIJE ZA PARALELNE OSE. HAJGENS-ŠTAJNEROVA TEOREMA



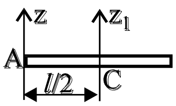
Napred navedeni obrasci za kružni prsten, kružnu ploču i valjak koriste se samo ako osa rotacije prolazi kroz centar mase tela koje rotira.
Za telo na slici centar masa tela se nalazi na *Oz* osi ($x_c=0$), gde su ose postavljene tako da je $O_1y_1 \,||\, Oy$, $O_1z_1 \,||\, Oz$.
Poznat je moment inercije J_z za osu *Oz*, treba naći J_{z1}=?

$$J_z=\sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right),\quad J_{z1}=\sum m_i\left(x_i'^2+y_i'^2\right),\quad x_i=x_i'+d,\, y_i=y_i',\, z_i=z_i',$$

$$J_{z1}=\sum m_i\left(x_i^2-2x_id+d^2+y_i^2\right)=\sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)-2d\sum m_ix_i+d^2\sum m_i.$$

Moment inercije za osu O_1z_1: $\boxed{J_{z1}=J_z+Md^2.}$

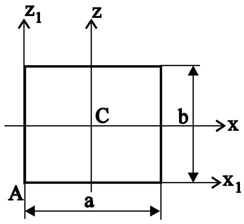
Hajgens-Štajnerova teorema: *Moment inercije tela za datu osu jednak je zbiru momenata inercije za paralelnu težišnu osu i proizvoda mase tela i kvadrata rastojanja između paralelnih osa.* Član $\boxed{Md^2}$ je *položajni moment inercije.* Moment inercije za težišnu osu je manji od momenta inercije za bilo koju drugu paralelnu osu: $\boxed{J_z=J_{z1}-Md^2.}$



Primeri primene Hajgens-Štajnerove teoreme:

a) Odrediti moment inercije tankog homogenog pravog štapa AB, dužine l, za njegovu težišnu osu.

Moment inercije za kraj štapa: $J_z=\dfrac{Ml^2}{3}$. *Rastojanje AC=l/2, pa primenom ove teoreme dobijamo:* $J_{z1}=J_z-d^2M=\dfrac{Ml^2}{3}-\left(\dfrac{l}{2}\right)^2M=\dfrac{Ml^2}{12}.$



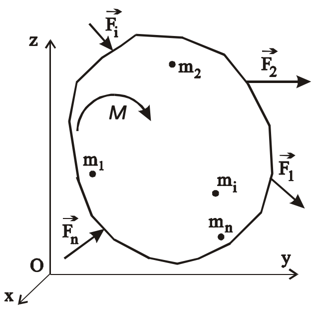
b) Odrediti momente inercije pravougaone ploče za ose kroz težište ploče.

Za ose Ax_1 i Az_1: $J_{z1}=\dfrac{Ma^2}{3}$, $J_{x1}=\dfrac{Mb^2}{3}$. *Rastojanja: d_1=a/2, d_2=b/2.*

Primenjujući teoremu dobićemo:

$$J_z=J_{z1}-d_1^2M=\frac{Ma^2}{12};\quad J_x=J_{x1}-d_2^2M=\frac{Mb^2}{12}.$$

4.3. ZAKON O KRETANJU SREDIŠTA MASA SISTEMA



Na svaku tačku sistema deluju spoljašnje i unutrašnje sile. Primenom II Njutnovog zakona na sve tačke, dobija se *n* jednačina čijim sabiranjem dobijamo izraz: $\Sigma m_i\vec{a}_i=\Sigma\vec{F}_i^s+\Sigma\vec{F}_i^u$. Dalje je:

$$\Sigma m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2};\Rightarrow\ M\vec{a}_C=\Sigma m_i\vec{a}_i,\ \Sigma\vec{F}_i^u=0,$$

Dobija se jednačina kretanja središta masa: $\boxed{M\vec{a}_C=\Sigma\vec{F}_i^s=\vec{F}_R^s.}$

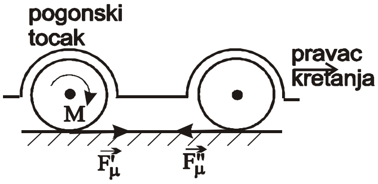
Zakon o kretanju središta masa sistema: *proizvod mase sistema i ubrzanja njegovog središta masa jednak je geometrijskom zbiru svih spoljašnjih sila.*

Projektovanjem vektorske jednačine dobijaju se skalarne jednačine: $M\ddot{x}_C=\sum X_i^s,\ M\ddot{y}_C=\sum Y_i^s,...$

Zakon o održanju kretanja središta masa:

$\vec{F}_R^s=\sum\vec{F}_i^s=0\Rightarrow\ \vec{a}_C=0,\ \vec{v}_C=const.$, tj telo miruje ili se kreće jednoliko;

ili projektovanjem na osu $X_R^s=\sum X_i^s=0.\Rightarrow M\ddot{x}_C=0\Rightarrow\ \dot{x}_C=v_{Cx}=const.$



Ako posmatramo kretanje automobila po horizontalnoj površini, sila pritiska gasova u motoru je unutrašnja sila koja, kao takva, ne može izazvati pomeranje središta masa. Kretanje se ostvaruje pomoću spoljašnjih sila trenja klizanja koje se javljaju između točkova i podloge. Motor predaje obrtni moment *M* pogonskim točkovima i pri tome tačka dodira točka sa podlogom teži klizanju unazad. Tada na pogonski točak deluje sila trenja usmerena u pravcu i smeru kretanja - to je spoljašnja sila koja izaziva pomeranje središta automobila. Kada te sile nema, ili kada je ona nedovoljna (npr. na poledici), ni pri velikom obrtnom momentu, proizvedenom unutrašnjim silama, automobil neće početi kretanje već će se pogonski točkovi obrtati u mestu.

4.4. ZAKON O PROMENI KOLIČINE KRETANJA SISTEMA

Količina kretanja sistema jednaka je geometrijskom zbiru količina kretanja svih tačaka sistema:

$$\vec{K} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i .$$

Polazeći od formule za središte sistema sledi: $\sum m_i\vec{r}_i = M\vec{r}_C \Rightarrow \vec{K} = \sum m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_C$.

Promena količine kretanja biće: $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \sum m_i \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i\vec{a}_i = \vec{F}_R^s \;\Rightarrow\; \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s \;\Rightarrow \boxed{\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{I}_i^s}$

Zakon ima sličnu formu kao i u dinamici tačke, s tim što se uzimaju samo impulsi spoljašnjih sila.

Zakon promene količine kretanja sistema: *promena količine kretanja sistema za neki vremenski interval, jednaka je vektorskom zbiru impulsa svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, a za isti interval.* Ovaj zakon ima primenu u mehanici fluida.

Zakon o očuvanju količine kretanja sistema: $\sum \vec{F}_i^s = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{K}}{dt} = 0$, tj. $\vec{K} = const.$

4.5. ZAKON O PROMENI MOMENTA KOLIČINE KRETANJA SISTEMA

Količina kretanja $\vec{K}$ je karakteristika translatornog kretanja, moment količine kretanja -zamah $\vec{L}_0$ karakteriše obrtno kretanje.

Glavni moment količine kretanja sistema: $\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i x m\vec{v}_i$ jednak je vektorskom zbiru momenata količine kretanja svih tačaka sistema.

U odnosu na koordinatnu osu može se pisati: $K_i = m_i v_i = m_i r_i \omega$, $\Rightarrow L_{zi} = r_i K_i = m_i r_i^2 \omega$, $\Rightarrow \boxed{L_z = J_z\omega}$ tj. zamah za osu obrtanja je jednak proizvodu momenta inercije tela za tu osu i ugaone brzine tela.

$$\frac{d\vec{L}_{0i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i x m_i\vec{v}_i\right) = \vec{r}_i x\left(\vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u\right); \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i x\vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i x\vec{F}_i^u . \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} .}$$

Zakon o promeni glavnog momenta količine kretanja: *izvod glavnog momenta količine kretanja sistema, jednak je vektorskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu istu tačku.*

Projektovanjem se dobija: $\dfrac{dL_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_x^{\vec{F}_i^s}$;...... , ili na drugi način: $\boxed{\dfrac{dL_z}{dt} = J_z\dot{\omega} = J_z\varepsilon}$.

Zakon o očuvanju glavnog momenta količine kretanja sistema:

1) $\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, tj. $\vec{L}_O = const.$ 2) $\sum M_z^{\vec{F}_i^s} = 0 \Rightarrow \dfrac{dL_z}{dt} = 0,\; tj.\, L_z = J_z\omega = const.$

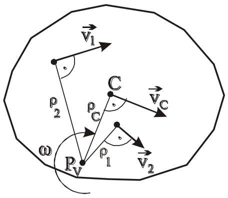
Kada se pojedine tačke udaljavaju od ose, povećava se J_z, ugaona brzina će se smanjivati i obrnuto.

4.6. KINETIČKA ENERGIJA SISTEMA

Kinetička energija sistema materijalnih tačaka jednaka je: $E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$.

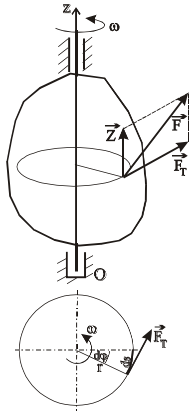
1. Translatorno kretanje. Brzine svih tačaka su paralelne i jednake $\Rightarrow$ $\boxed{E_k = \frac{1}{2} M v_C^2.}$

2. Obrtno kretanje. Brzina i-te tačke tela $v_i = r_i\omega \Rightarrow$ $E_k = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega^2 \Rightarrow$ $\boxed{E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2.}$



3. Ravno kretanje.
Izraz za kinetičku energiju jednak je zbiru E_K translacije sa brzinom središta i E_K obrtnog kretanja oko središta: $\boxed{E_k = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2}$

4.7. RAČUNANJE RADOVA



4.7.1. Rad sile koja izvodi obrtanje tela oko ose

Ako se sila razloži na komponentu paralelnu sa osom rotacije Oz i komponentu u ravni upravnoj na osu rotacije $\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{Z}$, obrtanje oko ose Oz vrši samo komponenta F_T:

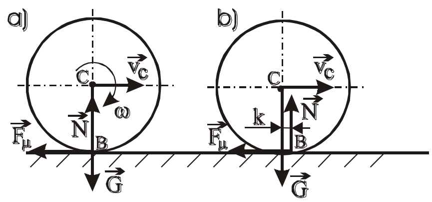
$$ds = rd\varphi \Rightarrow d\mathbf{A} = F_T ds = F_T r d\varphi. \qquad M_z^{\vec{F}} = F_T r, \quad d\mathbf{A} = M_z^{\vec{F}} d\varphi.$$

Pri obrtanju tela za konačan ugao φ_1 rad sile jednak je: $\mathbf{A} = \int_0^{\varphi_1} M_z^F d\varphi.$

Kada je $F = const.$ $\Rightarrow$ $\mathbf{A} = M_z^F \int_0^{\varphi_1} d\varphi \Rightarrow \boxed{\mathbf{A} = M_z^F \varphi_1.}$

4.7.1. Rad sile trenja (otpora) pri kotrljanju

Otpor kotrljanju, usled deformacije podloge, izaziva pojavu sprega $M = kN$ (k je krak otpora kotrljanja). Elementarni rad ovog sprega jednak je:



$$d\mathbf{A} = -Md\varphi = -kNd\varphi, \qquad d\varphi = ds_C/R \quad \Rightarrow d\mathbf{A} = -kN\frac{ds_C}{R}.$$

Ako je $N = const.$ rad otpora kotrljanja biće jednak: $\mathbf{A} = -\frac{k}{R}N\int ds_C = -\frac{k}{R}N \cdot s_C \Rightarrow \boxed{\mathbf{A} = -kN\frac{s_C}{R}}$, gde je s_C pomeranje težišta tela.

4.8. ZAKON O PROMENI KINETIČKE ENERGIJE SISTEMA

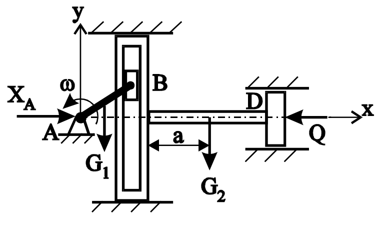
Zakon promene kinetičke energije za tačku primenjujemo za i-tu tačku sistema (uzimajući spoljašnje i unutrašnje sile): $dE_k = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = d\mathbf{A}_i^s + d\mathbf{A}_i^u$, nakon sabiranja svih jednačina:

$d\sum\frac{m_i v_i^2}{2} = dE_k = \sum d\mathbf{A}_i^s + \sum d\mathbf{A}_i^u$, Integracijom se dobija konačan izraz: $\boxed{E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i^s + \sum \mathbf{A}_i^u.}$

Promena kinetičke energije sistema, pri nekom pomeranju, jednaka je sumi radova na tom pomeranju, svih spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje na sistem deluju. Kod apsolutno krutog tela i kada na sistem deluju idealne veze (glatka površina, kotrljanje bez klizanja), zbir radova svih unutrašnjih sila jednak je nuli. Primenjuje se za određivanje brzina, ubrzanja ili radova.

4.9. ZADACI IZ DINAMIKE TELA

ZADATAK 4.1. (**Zakon o kretanju središta masa**): Krivaja AB, dužine *r=0,2m* i težine $G_1=10N$, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega=2\ rad/s$, dovodeći u kretanje kulisu i klip D, povezan sa njom (čija je ukupna težina $G_2=20N$, dužina $2a=0,4m$). Na klip, u toku kretanja deluje konstantna sila $Q=50N$. Zanemarujući trenje, naći najveći horizontalni pritisak X_A na osovinu A krivaje. Uzeti da je $g \cong 10 m/s^2$.



Rešenje: Posmatraćemo kretanje celog sistema:

$$M\ddot{x}_C = \sum X_i^s = X_A - Q. \quad \text{Ovde je: } \sphericalangle BAD = \varphi = \omega t,$$

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{M};\ m_1 = \frac{G_1}{g} = \frac{10}{10} = 1kg,\ \ m_2 = \frac{G_2}{g} = \frac{20}{10} = 2kg;$$

$$x_1 = \frac{r}{2}\cos\omega t = 0{,}1\cos 2t,\ \ x_2 = a + r\cos\omega t = 0{,}2 + 0{,}2\cos 2t.$$

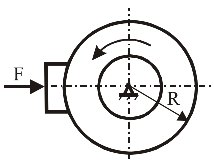
Diferenciranjem koordinate težišta po vremenu dobijamo:

$$x_C = \frac{1\cdot 0{,}1\cos 2t + 2\cdot\left(0{,}2 + 0{,}2\cos 2t\right)}{3},\ \ \ddot{x}_C = -\frac{1}{3}\left(0{,}1 + 0{,}4\right)\cdot 4\cos 2t = -\frac{2}{3}\cos 2t.$$

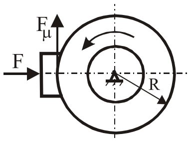
$$X_A = Q + M\ddot{x}_C = 50 - 3\cdot\frac{2}{3}\cos 2t = 50 - 2\cos 2t.$$

Maksimalnu vrednost pritiska imaćemo za $\cos 2t=-1$: $X_{A\max} = 50 + 2 = 52N.$

ZADATAK 4.2. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema**): Disk mase *m=12kg*, poluprečnika *R=12cm*, rotira sa *n=600ob/min* oko nepomične ose O kroz centar. Odrediti potrebni koeficijent trenja između kočnice i diska da bi se disk zaustavio nakon 20 obrtaja, pritiskom kočnice na disk silom od *F=90N*. Poluprečnik inercije diska jednak je *i=0,2m*. Odrediti vreme do zaustavljanja. Trenje u osloncu zanemariti.



Rešenje: Primenićemo zakon promene kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{F_\mu}$. Kinetička energija pri obrtnom kretanju jednaka je $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$, gde je moment inercije $J = mi^2 = 12\cdot 0{,}2^2 = 0{,}48kgm^2$. Početna ugaona brzina obrtanja diska jednaka je: $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi\cdot 600}{30} = 20\pi = 62{,}8\frac{rad}{s}$. Na kraju kretanja je ugaona brzina, a samim tim i kinetička energija diska, jednaka nuli. Ugao koji disk opiše za *N=25ob* jednak je $\varphi = 2\pi N = 50\pi = 157 rad = 157\frac{180}{\pi} = 9000^0$. Pošto je sila trenja $F_\mu = \mu N$, rad sile trenja jednak je:



$$\mathbf{A}_{F_\mu} = -M\cdot\varphi = -\left(F_\mu R\right)\cdot\varphi = -\left(\mu F R\right)\cdot\varphi = -\mu\cdot 90\cdot 0{,}12\cdot 157 = -1695{,}6\mu.$$

Zamenom svih vrednosti dobijamo:

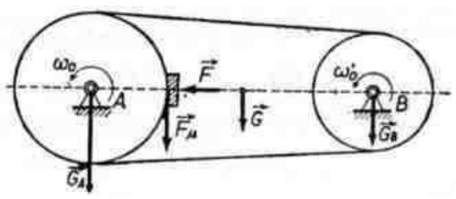
$$0 - \frac{1}{2}J\omega^2 = -F_\mu R\varphi \rightarrow -\frac{1}{2}0{,}48\cdot 62{,}8^2 = -1695{,}6\mu \rightarrow\ \ 946{,}5 = 1695{,}6\mu \rightarrow\ \ \mu = \frac{946{,}5}{1695{,}6} = 0{,}558.$$

Iz jednačina jednakousporenog obrtanja sledi:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t \qquad \rightarrow \qquad 0 = \omega_0 - \varepsilon t \rightarrow\ \ \varepsilon t = \omega_0 = 62{,}8 \rightarrow\ \ \varepsilon = \frac{62{,}8}{t}.$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \rightarrow\ \ 157 = 62{,}8t - \frac{1}{2}\frac{62{,}8}{t}t^2 \rightarrow\ \ 157 = 62{,}8t - 31{,}4t \rightarrow\ \ t = \frac{157}{31.4} = 5s.$$

ZADATAK 4.3. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema**): Kaišnici A i B, spojeni kaišem obrću se tako da kaišnik A ima ugaonu brzinu $\omega_0 = 31{,}4\,rad/s$. Masa kaišnika A, poluprečnika *R=15cm*, iznosi *4,5kg*. Masa kaišnika B, poluprečnika *r=10cm*, iznosi *3kg* a masa kaiša je *1kg*. Da bi se kočilo ovo obrtanje, na kaišnik A se deluje silom *F=80N*, preko papuče za kočenje. Koeficijent trenja papuče o kaišnik iznosi $\mu=0{,}45$. Zanemarujući trenje u ležištima i smatrajući da su kaišnici homogeni puni diskovi, odrediti koliki će broj obrtaja izvršiti kaišnik A dok se ne zaustavi.



Rešenje: Zakon promene kinetičke enegije sistema glasi: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ gde je $E_{k1} = 0$. Brzine svih tačaka kaiša su jednake međusobno: $v_k = R\omega_0 = r\omega_0' = 0{,}15 \cdot 31{,}4 = 4{,}71 m/s$,

pa sledi $\omega_0' = \dfrac{v_k}{r} = \dfrac{4{,}71}{0{,}1} = 47{,}1\dfrac{rad}{s}$.

Momenti inercije kaišnika: $J_A = \frac{1}{2} m_A R^2 = \frac{1}{2} 4{,}5 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}0506 kgm^2$, $J_B = \frac{1}{2} m_B r^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}015 kgm^2$.

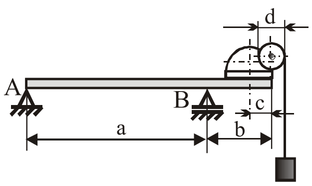
Sa tim podacima se mogu izračunati kinetičke energije pojedinih tela i celog sistema:
$E_{kA} = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2;\ E_{kB} = \frac{1}{2} J_B \omega_0'^2;\ E_{kK} = \frac{1}{2} m_k v_k^2 \rightarrow \sum E_{ki} = E_{kA} + E_{kB} + E_{kK} = 24{,}94 + 16{,}64 + 11{,}09 = 52{,}67 kgm^2/s^2$.

Rad sile teže jednak je nuli (težišta se pri kretanju ne pomeraju). Ugao obrtanja do zaustavljanja $\varphi = 2\pi N$, rad sile trenja:

$$\mathbf{A}_{F_\mu} = -(\mu F R) \cdot \varphi = -(\mu F R) \cdot 2\pi N = -0{,}45 \cdot 80 \cdot 0{,}15 \cdot 2\pi N = -33{,}9 \cdot N.$$

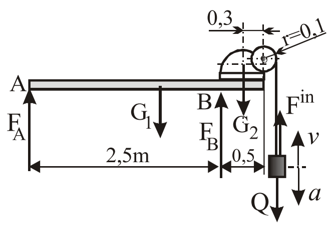
Zamenom svih vrednosti u izraz $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ dobijamo:

$$0 - 52{,}67 = -33{,}9N \rightarrow 52{,}67 = 33{,}9N \rightarrow N = \frac{52{,}67}{33{,}9} = 1{,}55.$$



ZADATAK 4.4. (**Dalamberov princip**): Dizalica, na prepustu grednog nosača *AB,* podiže teret težine *Q=20N* sa usporenjem $a=2m/s^2$. Odrediti reakcije u osloncima grede ako je težina grede $G_1=40N$, težina dizalice $G_2=10N$. Dato: *a=2,5m*; *b=0,5m; c=30cm; d=20cm.*

Rešenje: Teret se podiže sa usporenjem pa je vektor $\vec{a}$ usmeren suprotno vektoru brzine. Inercijalna sila je usmerena suprotno smeru ubrzanja tereta i ima intenzitet: $F^{in} = ma = \dfrac{Q}{g} a = \dfrac{20}{9{,}81} \cdot 2 = 4{,}08N.$



Na sistem deluju sile (aktivne, reaktivne i inercijalne):

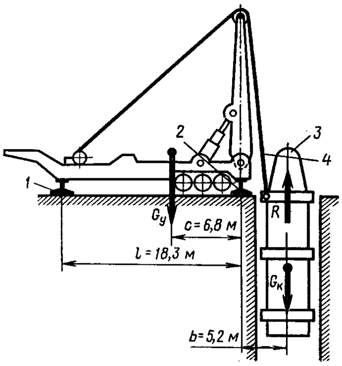
$\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{Q}, \vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}^{in}$.

Iz uslova fiktivne ravnoteže sledi:

$\sum M_A = 0;\ F_B \cdot 2{,}5 - Q \cdot 3{,}1 + F^{in} \cdot 3{,}1 - G_2 \cdot 2{,}7 - G_1 \cdot 1{,}5 = 0$

$$2{,}5F_B - 20 \cdot 3{,}1 + 4{,}08 \cdot 3{,}1 - 10 \cdot 2{,}7 - 40 \cdot 1{,}5 = 0 \rightarrow \quad 2{,}5F_B - 136{,}35 = 0 \quad \rightarrow F_B = 54{,}54N.$$

$\sum Y_i = 0;\ F_A + F_B + F^{in} - G_1 - G_2 - Q = 0 \rightarrow \quad F_A + 54{,}54 + 4{,}08 - 40 - 10 - 20 = 0 \rightarrow F_A = 11{,}38N.$



ZADATAK 4.5. (**Dalamberov princip):** Odrediti intenzitete vertikalnih reaktivnih sila na prednjim i zadnjim osloncima dizalice pri spuštanju kontejnera 3. Spuštanje se obavlja sa usporenjem *a= 2,45m/s*^{2}. Težina dizalice G_y*=46,8kN*; težina kontejnera G_K*=18kN* a sila otpora spuštanju kontejnera *R=12kN.* Veličine rastojanja su date na slici.

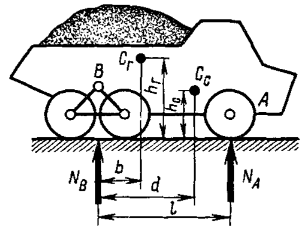
Rešenje: Inercijalna sila je usmerena nadole i brojno je jednaka:

$$F^{in}=ma=\frac{G_K}{g}a=\frac{18}{9{,}81}\cdot 2{,}45=4{,}5kN.$$

Iz uslova fiktivne ravnoteže sledi:

$$\sum M_{(1)}=0\rightarrow\ \ Y_2=42{,}9kN,\qquad \sum Y_i=0\rightarrow\ \ Y_1=14{,}4kN$$

ZADATAK 4.6. (**Dalamberov princip):** Transportno vozilo, mase *m=10t*, prevozi teret iste mase. Položaji težišta vozila i tereta su dati na slici, pri čemu su dužine: *b=2,3m; d=3,8m; l=5,8m,* h_r*=2,1m;* h_C*=1,7m*. Naći ubrzanje vozila ako su zadnji točkovi pogonski a koeficijent trenja između točkova i podloge μ*=0,6*.

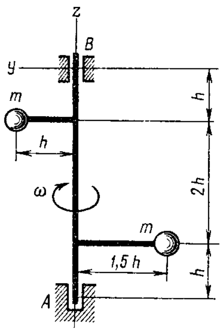


Rešenje: Inercijalne sile vozila i tereta su usmerene suprotno smeru ubrzanja, intenziteta: $F^{in}=ma$. Težine tereta i vozila su jednake i iznose $G=mg=9810N.$ Sila trenja deluje na pogonski točak suprotno smeru obrtanja tj. u smeru kretanja: $F_\mu=\mu N_B$. Iz uslova fiktivne ravnoteže dobija se:

$$\sum M_A=0;\ N_B\cdot 5{,}8-G(5{,}8-3{,}8)-G(5{,}8-2{,}3)-F^{in}\cdot 1{,}7-F^{in}\cdot 2{,}1=0\rightarrow N_B=0{,}95G+0{,}655F^{in}.$$

$$F_\mu=\mu N_B=0{,}6\left(0{,}95G+0{,}655F^{in}\right)=0{,}57G+0{,}393F^{in}$$

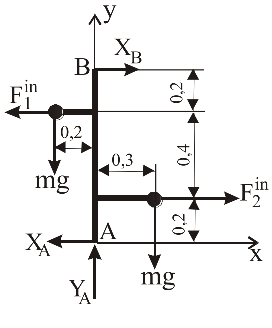
$$\sum X_i=0;\ F_\mu-F^{in}-F^{in}=0\rightarrow\ \ 0{,}57G+0{,}393F^{in}-2F^{in}=0\rightarrow 0{,}57mg-1{,}607ma=0\rightarrow a=\frac{0{,}57mg}{1{,}607m}=3{,}48\frac{m}{s^2}.$$



ZADATAK 4.7. (**Dalamberov princip):** Na osovini AB, zanemarljive težine, koja se ravnomerno obrće konstantnom ugaonom brzinom $\omega=7\,rad/s$, učvršćena su dva jednaka tereta čije su mase *m=1kg*. Odrediti reakcije u osloncima A i B za prikazani položaj ako je *h=20cm*.

Rešenje:

Ubrzanja tereta će biti jednaka (uzimajući da je rastojanje *h=0,2m*):



$$a_1=a_N=h\omega^2=0{,}2\cdot 7^2=9{,}8\frac{m}{s^2},$$

$$a_2=a_N=1{,}5h\omega^2=14{,}7\frac{m}{s^2},$$

(tangencijalna komponenta ubrzanja je jednaka nuli pri obrtanju konstantnom ugaonom brzinom). Normalna ubrzanja su usmerena ka osi rotacije, inercijalne sile su usmerene suprotno od njih i imaju intenzitete:

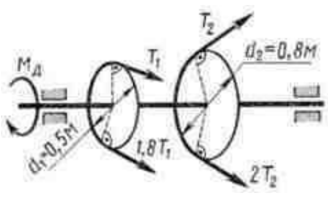
$F_1^{in}=ma_1=1\cdot 9{,}8=9{,}8N,\ F_2^{in}=ma_2=1\cdot 14{,}7=14{,}7N$. Iz uslova fiktivne ravnoteže sledi:

$$\sum Y_i=0;\ Y_A-mg-mg=0\qquad\rightarrow\ Y_A=2mg=2\cdot 1\cdot 9{,}81=19{,}62N,$$

$$\sum M_A=0;\ X_B\cdot 0{,}8+F_2^{in}\cdot 0{,}2-F_1^{in}\cdot 0{,}6+mg\cdot 0{,}3-mg\cdot 0{,}2=0$$

$$0{,}8X_B+14{,}7\cdot 0{,}2-9{,}8\cdot 0{,}6+9{,}81\cdot 0{,}3-9{,}81\cdot 0{,}2=0\rightarrow\ 0{,}8X_B-1{,}959=0\ \ \rightarrow\ X_B=2{,}45N.$$

$$\sum X_i=0;\ X_B+F_2^{in}-F_1^{in}-X_A=0\rightarrow\ \ X_A=7{,}35N.$$



ZADATAK 4.8. (**Rad, Snaga):** Na vratilu, koje se obrće konstantnim brojem obrtaja *n=750ob/min*, učvršćeni su pogonski kaišnici datih prečnika. Sile u slobodnim ograncima kaiševa iznose $T_1=1800N$ i $T_2=1500N$. Odrediti rad koji vrši pogonski moment M_d za *t=20min* i potrebnu snagu *P*.

Rešenje: Ugaona brzina: $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{\pi \cdot 750}{30} = 25\pi = 78{,}5\dfrac{rad}{s}$,

za *t=20min=1200s* ugao obrtanja vratila: $\varphi = \omega t = 25\pi \cdot 1200 = 30000\pi\, rad$.

Momenti na kaišnicima računaju se preko obimnih sila:

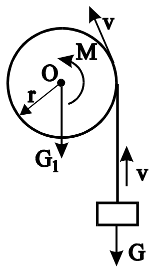
$$M_1 = (1{,}8T_1 - T_1)\frac{d_1}{2} = 0{,}8 \cdot 1800\frac{0{,}5}{2} = 360Nm = 0{,}36kNm\,,$$

$$M_2 = (2T_2 - T_2)\frac{d_2}{2} = 1500\frac{0{,}8}{2} = 600Nm = 0{,}6kNm\,.$$

Ukupan rad: $\mathbf{A} = M_1\varphi + M_2\varphi = (0{,}36 + 0{,}6) \cdot 30000\pi = 28800\pi\ kJ$;

potrebna snaga: $P = \dfrac{\mathbf{A}}{t} = \dfrac{28800\pi}{1200} = 75{,}4kW$.

ZADATAK 4.9. (**Zakon o promeni momenta količine kretanja):** Na točak poluprečnika *r=40cm*, težine $G_1=20N$, koji se obrće oko nepomične horizontalne ose O, namotan je konac na čijem je kraju teret *G=30N*. Na točak deluje obrtni moment *M=40Nm*. Smatrajući točak materijalnim kružnim prstenom, odrediti ubrzanje tereta *a*.



Rešenje: Primenom zakona o promeni momenta količine kretanja $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{F_i^s}$,
gde je z osa postavljena kroz tačku O, normalno na ravan točka dobija se:

$$\sum M_z^{F_i^s} = M - Gr = 40 - 30 \cdot 0{,}4 = 28Nm; \qquad m = \frac{G}{g} = \frac{30}{10} = 3kg,\ m_1 = \frac{G_1}{g} = 2kg,$$

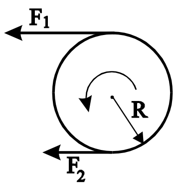
$$L_z = (L_z)_{ter} + (L_z)_{toc} = rmv + rm_1v = rv(m + m_1) = 0{,}4v \cdot 5 = 2v$$

$$\frac{dL_z}{dt} = 2\frac{dv}{dt};\ 2\frac{dv}{dt} = 28, \quad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \frac{28}{2} = 14\frac{m}{s^2}.$$

ZADATAK 4.10. (**Zakon o promeni momenta količine kretanja):** Odrediti ugaono ubrzanje točka, (poluprečnika *R=0,4m,* težine *G=40N*, poluprečnika inercije za osu obrtanja $i_z=0{,}2m$), ako su sile u kaišniku, koji točak dovodi u kretanje, $F_1=60N$ i $F_2=50N$.

Rešenje: Po zakonu promene momenta količine kretanja imamo:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{F_i^s};\ \sum M_z^{F_i^s} = F_1R - F_2R = 0{,}4(60 - 50) = 4Nm.$$



$$J_z = Mi_z^2; \quad L_z = J_z\omega = \frac{G}{g}i_z^2\omega = \frac{40}{10} \cdot 0{,}04 \cdot \omega = 0{,}16\omega; \quad \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}16\omega) = 0{,}16\varepsilon;$$

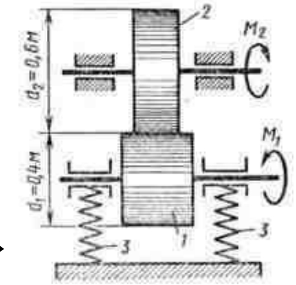
$$0{,}16\varepsilon = 4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{4}{0{,}16} = 25\frac{rad}{s^2}.$$

ZADATAK 4.11. (**Zakon o promeni momenta količine kretanja):** U frikcionom prenosniku, pritisna sila između vodećeg 1 i vođenog frikcionog točka 2, obezbeđuje se oprugama 3. Odrediti veličinu momenta M_1 na vodećem vratilu i minimalnu silu pritiska opruga ako na vođeno vratilo deluje otporni moment $M_2=2{,}5kNm$. Mase točkova su: $m_1=25kg$ i $m_2=75kg$, poluprečnik inercije vodećeg točka $i_1=0,35d_1$ a vođeni točak smatrati homogenim diskom. Ugaono ubrzanje vratila 2 je $\varepsilon_2=250\ rad/s^2$, koeficijent trenja među točkovima $\mu=0,3$.

Rešenje: Momenti inercije točkova:

$$J_{z1} = m_1 i_1^2 = 25(0{,}35 \cdot 0{,}4)^2 = 0{,}49 kgm^2,$$

$$J_{z2} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} 75 \cdot 0{,}3^2 = 3{,}375 kgm^2.$$



Zakon promene momenta količine kretanja za telo 2:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{F_i} \rightarrow J_{z2} \cdot \varepsilon_2 = -M_2 + (\mu F)\frac{d_2}{2},$$

$$3{,}375 \cdot 250 = -2500 + 0{,}3F \cdot 0{,}3 \rightarrow 843{,}75 = -2500 + 0{,}09F \rightarrow 0{,}09F = 3343{,}75 \rightarrow$$

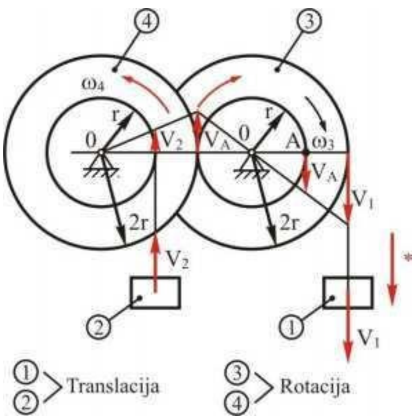
Pošto je $r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \rightarrow \omega_1 = \frac{r_2\omega_2}{r_1} = \frac{0{,}3\omega_2}{0{,}2} = 1{,}5\omega_2$, odnosno $\frac{d\omega_1}{dt} = 1{,}5\frac{d\omega_2}{dt} \rightarrow \varepsilon_1 = 1{,}5\varepsilon_2 = 375\frac{rad}{s^2}$.

Zakon promene momenta količine kretanja za telo 1: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{F_i} \rightarrow J_{z1} \cdot \varepsilon_1 = M_1 - (\mu F)\frac{d_1}{2}$,

$$0{,}49 \cdot 375 = M_1 - 0{,}3 \cdot 37152{,}8 \cdot 0{,}2 \rightarrow 183{,}75 = M_1 - 2229{,}2 \rightarrow M_1 = 2229{,}2 + 183{,}75 = 2412{,}95 Nm = 2{,}41 kNm.$$

4.10. BRZINE KRETANJA ELEMENATA SISTEMA I NJIHOV ODNOS

Mehanički sistem 1:



Telo 1 kreće se brzinom v_1,

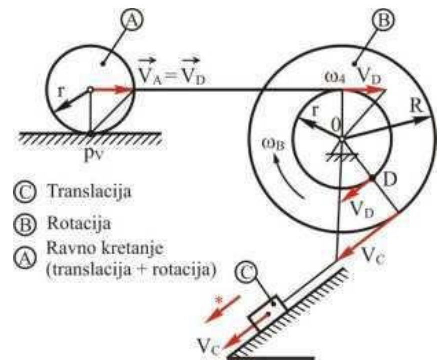
Iz sličnosti trouglova: $\frac{v_1}{2r} = \frac{v_A}{r} \rightarrow v_A = \frac{v_1 \cdot r}{2r} = \frac{v_1}{2}$

Iz sličnosti trouglova: $\frac{v_A}{2r} = \frac{v_2}{r}$

Za telo 2 biće $v_2 = \frac{v_A \cdot r}{2r} = \frac{v_A}{2} = \frac{v_1}{4}$

Telo 3 $\rightarrow$ $\omega_3 = \frac{v_1}{2r}$ Telo 4 $\rightarrow \omega_4 = \frac{v_2}{r} = \frac{v_1}{4r}$

Mehanički sistem 2:

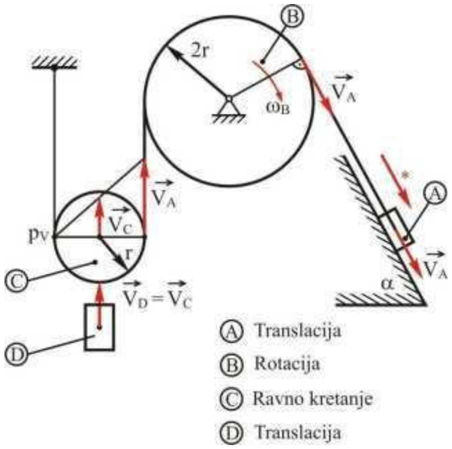


Telo C kreće se brzinom v_C,

Iz sličnosti trouglova: $\frac{v_C}{R} = \frac{v_D}{r} \rightarrow v_D = \frac{v_C \cdot r}{R}$

$$\omega_B = \frac{v_C}{R} = \frac{v_D}{r} = \frac{v_C \cdot \frac{r}{R}}{r} = \frac{v_C \cdot r}{R \cdot r} = \frac{v_C}{R}$$

Brzina centra tela A $\rightarrow$ $v_A = v_D = v_C\frac{r}{R}$



Mehanički sistem 3:

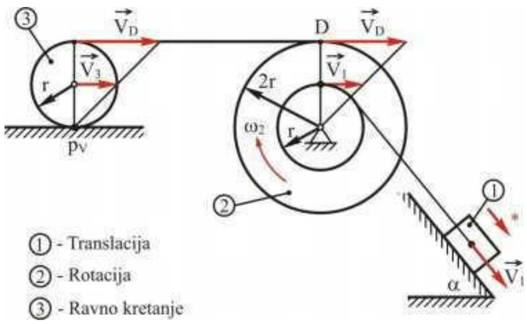
Telo A kreće se brzinom v_A,

Telo B $\rightarrow \omega_B = \dfrac{v_A}{2r}$

Telo C $\rightarrow$

Iz sličnosti trouglova $\dfrac{v_A}{2r} = \dfrac{v_C}{r} \rightarrow v_C = \dfrac{v_A \cdot r}{2r} = \dfrac{v_A}{2}$

Telo D $\rightarrow v_D = v_C = \dfrac{v_A}{2}$



Mehanički sistem 4:
Telo 1 kreće se brzinom v_1,
Telo 2: Iz sličnosti trouglova

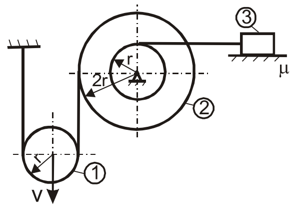
$$\frac{v_1}{r} = \frac{v_D}{2r} \rightarrow v_D = 2v_1$$

$$\omega_2 = \frac{v_D}{2r} = \frac{v_1}{r}$$

Telo 3: Iz sličnosti trouglova

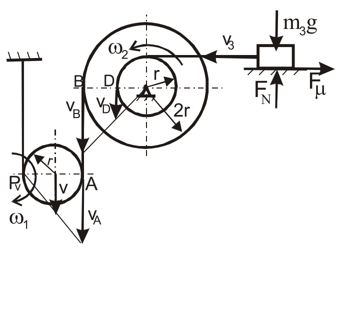
$$\frac{v_D}{2r} = \frac{v_3}{r} = \rightarrow v_3 = \frac{v_D}{2} = v_1$$

ZADATAK 4.12. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema):**
Materijalni sistem čine tri tela. Telo 1 je homogeni kotur poluprečnika $r=0,1m$ i mase $m_1=2kg$. Telo 2 je koaksijalni kalem, poluprečnika r i $2r$, mase $m_2=4kg$, poluprečnika inercije za osu rotacije $i_2=0,07m$. Teret 3, mase $m_1=1kg$, klizi po hrapavoj horizontalnoj ravni koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,25$. Tela povezuje lako nerastegljivo uže. Ceo sistem se kreće u vertikalnoj ravni, bez početne brzine, pri čemu je brzina centra tela 1 jednaka $v=v(t)$. Naći ubrzanje tela 1.



Rešenje: Telo 1 vrši ravno kretanje, trenutni pol brzina nalazi se u tački dodira diska i nepokretnog kraja užeta, pa je: $\omega_1 = \dfrac{v}{CP_v} = \dfrac{v}{r} = \dfrac{v}{0,1}$. Brzina tačke A na telu 1 je: $v_A = AP_v \cdot \omega_1 = 2r \cdot \dfrac{v}{r} = 2v$. Tačka B na telu 2 imaće istu brzinu kao i tačka A tj. $v_B=v_A=2v$. Telo 2 vrši rotaciju oko nepomične ose pa je: $\omega_2 = \dfrac{v_B}{2r} = \dfrac{2v}{2r} = \dfrac{v}{r}$. Brzina tačke D na telu 2: $v_D = r \cdot \omega_2 = r \cdot \dfrac{v}{r} = v$, i jednaka je brzini tela 3 koje se kreće translatorno, tj. $v_3=v_D=v$.

Zakon promene kinetičke energije glasi: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ gde je $E_{k0} = 0$ jer sistem kreće iz stanja mirovanja.



Izrazi za kinetičke energije (u funkciji brzine v):
telo 1 (ravno kretanje)- disk je homogen pa je

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2,\ \omega_1 = \frac{v_{C1}}{r} \text{ odnosno } E_{k1} = \frac{3}{4} m_1 v_{C1}^2 = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot v^2 = 1{,}5v^2;$$

telo 2 (rotacija) - $J_2 = m_2 i_2^2 = 4 \cdot 0{,}07^2 = 0{,}02 kgm^2$,

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 \cdot \left(\frac{v}{0{,}1}\right)^2 = 0{,}01 \frac{v^2}{0{,}01} = v^2$$

telo 3 (translacija) - $E_{k3}=\frac{1}{2}m_3v_3^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot v^2=0{,}5v^2$;

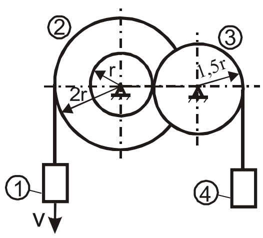
$\rightarrow \sum E_{ki}=E_{k1}+E_{k2}+E_{k3}=1{,}5v^2+v^2+0{,}5v^2=3v^2.$

<u>Izrazi za radove sila (u funkciji pomeranja *s*)</u>: za telo 1 (težište tela se pomera nadole za $h_1=s$) - $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_{mg}=+m_1gh_1=2\cdot 9{,}81s=19{,}62s$; za telo 2 je rad teže jednak nuli jer nema pomeranja težišta; za telo 3 (nema visinskog pomeranja težišta pa je $\mathbf{A}_{mg}=0$, samo sila trenja vrši rad) - $F_N=m_3g\rightarrow F_\mu=\mu F_N=\mu m_3g=0{,}25\cdot 1\cdot 9{,}81=2{,}45N$; $\mathbf{A}_3=\mathbf{A}_{F_\mu}=-F_\mu s=-2{,}45s.$

$\sum \mathbf{A}_i=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3=19{,}62s+0-2{,}45s=17{,}17s.$ Zamenom u $E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i$ dobijamo: $3v^2=17{,}17s$,

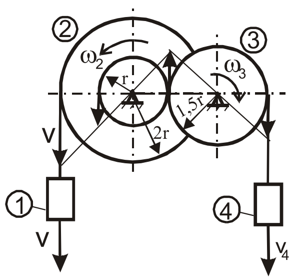
a diferenciranjem: $3\cdot 2v\frac{dv}{dt}=17{,}17\frac{ds}{dt}\rightarrow 6v\cdot a=17{,}17v \rightarrow 6a=17{,}17 \rightarrow a=\frac{17{,}17}{6}=2{,}86\frac{m}{s^2}.$

<u>ZADATAK 4.13.</u> (**<u>Zakon o promeni kinetičke energije sistema</u>**): Materijalni sistem čine četiri tela. Teret 1, mase $m_1=1kg$, se kreće nadole. Telo 2 je koaksijalni kalem većeg poluprečnika $2r=0{,}4m$ sa ozubljenim delom poluprečnika $r=0{,}2m$. Telo 2 je mase $m_2=4kg$, poluprečnika inercije za osu rotacije $i_2=0{,}3m$. Delom svoje širine ozubljeno telo 3 smatrati homogenim diskom, poluprečnika $r_3=1{,}5r=0{,}3m$, mase $m_3=4kg$. Teret 4 ima masu $m_4=1kg$. Tela su povezana lakim nerastegljivim užetom. Ceo sistem se kreće u vertikalnoj ravni, bez početne brzine. Naći ubrzanje tela 1.



<u>Rešenje</u>: <u>Telo 1 vrši translatorno kretanje</u> brzinom *v*. <u>Telo 2 vrši rotaciju</u> oko nepomične ose pa je: $\omega_2=\frac{v}{2r}$. Brzina tačke na telu 2 koja je u dodiru sa telom 3: $v_D=r\cdot\omega_2=r\cdot\frac{v}{2r}=\frac{v}{2}=0{,}5v$. <u>Telo 3 vrši rotaciju</u> oko nepomične ose pa je: $\omega_3=\frac{v_D}{1{,}5r}=\frac{0{,}5v}{1{,}5r}=\frac{v}{3r}$.

Brzina tačaka na obimu diska 3 jednake su brzini <u>tela 4 koje se kreće translatorno</u> , tj. $v_D=v_3=0{,}5v$.



Zakon promene kinetičke energije: $E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i$ gde je $E_{k0}=0$ jer sistem kreće iz stanja mirovanja.

<u>Izrazi za kinetičke energije (u funkciji brzine *v*)</u>:

za telo 1 (translatorno kretanje)- $E_{k1}=\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot v^2=0{,}5v^2$;

za telo 2 (rotacija) - $J_2=m_2i_2^2=4\cdot 0{,}3^2=0{,}36kgm^2$,

$E_{k2}=\frac{1}{2}J_2\omega_2^2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}36\cdot\left(\frac{v}{0{,}4}\right)^2=0{,}18\frac{v^2}{0{,}16}=1{,}125v^2$;

za disk 3 (rotacija) - $J_3=\frac{1}{2}m_3r_3^2=0{,}18kgm^2$ $E_{k3}=\frac{1}{2}J_3\omega_3^2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}18\cdot\left(\frac{v}{0{,}6}\right)^2=0{,}25v^2$;

za telo 4 (translacija) - $E_{k4}=\frac{1}{2}m_4v_4^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(0{,}5v)^2=0{,}125v^2$

$\rightarrow \sum E_{ki}=0{,}5v^2+1{,}125v^2+0{,}25v^2+0{,}125v^2=2v^2.$

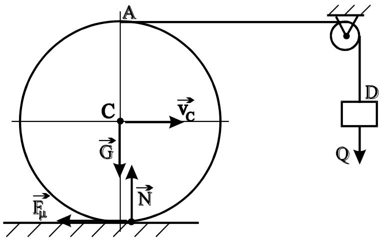
<u>Izrazi za radove sila (u funkciji pomeranja *s*)</u>: za telo 1 (težište tela se pomera nadole za $h_1=s$) - $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_{mg}=+m_1gh_1=1\cdot 9{,}81s=9{,}81s$;

za tela 2 i 3 je rad sile teže jednak nuli jer nema pomeranja težišta;

za telo 4 (pomeranje $h_4=s_4$; pošto je $v_4=0{,}5v\rightarrow s_4=0{,}5s$) - $\mathbf{A}_4=\mathbf{A}_{mg}=+m_4gh_4=1\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5s=4{,}905s$;

$\sum \mathbf{A}_i=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3=9{,}81s+0+0+4{,}905s=14{,}715s.$ Zamenom u $E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i$ dobijamo: $2v^2=14{,}715s$,

a diferenciranjem po vremenu: $2\cdot 2v\frac{dv}{dt}=14{,}715\frac{ds}{dt}\rightarrow 4v\cdot a=14{,}715v \rightarrow a=\frac{14{,}715}{4}=3{,}68\frac{m}{s^2}.$



ZADATAK 4.14. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema):** Na disk, poluprečnika $R=0,5m$ i težine $G=50N$, namotano je uže, prebačeno preko nepomičnog kotura O i zategnuto teretom D, težine $Q=40N$. Odrediti brzinu i ubrzanje centra diska C, nakon pređenog puta s, ako je $v_{C0}=0$. Krak otpora kotrljanja diska je $k=0,1m$, poluprečnik inercije diska za centralnu osu je $i=0,4m$. Masu konca i kotura o zanemariti.

Rešenje: $E_{k0}=0$, tj. $E_k=\Sigma A_i$. (a)

$$E_k = E_{kter} + E_{kdisk} = \frac{1}{2}m_t v_D^2 + \left(\frac{1}{2}m_d v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2\right);$$

$$m_t = \frac{Q}{g} = 4kg,\ m_d = \frac{G}{g} = 5kg, \quad \omega = \frac{v_C}{R} = \frac{v_C}{0,5} = 2v_C,$$

$v_D=v_A=2v_C,$ $J_z = m_d \cdot i^2 = 5\cdot 0,4^2 = 0,8kgm^2$

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2v_C)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot v_C^2 + \frac{1}{2}\cdot 0,8\cdot(2v_C)^2\right) = v_C^2(8+2,5+1,6) = 12,1v_C^2;$$

Rad vrši sila Q i spreg koje čine sile N i G. Pošto je $v_D=2v_C$, pomeranje tereta $h=2s$ (gde je s pomeranje centra diska). Radovi sila jednaki su:

$$A_Q=hQ=2sQ=80s,\ A_{kotr} = -\frac{k}{R}Gs = -\frac{0,1}{0,5}\cdot 50s = -10s,\ \sum A_i = 80s - 10s = 70s.$$

Zamenjujući u jednačinu (a) dobijamo brzinu centra diska: $12,1v_C^2 = 70s \rightarrow v_C^2 = \frac{70}{12,1}s = 5,78s$

Radi određivanja ubrzanja diferenciramo jednačinu po vremenu ($ds/dt=v_C$):

$$12,1\cdot 2v_C\frac{dv_C}{dt} = 70\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = a_C = \frac{70}{24,2} = 2,89\frac{m}{s^2}.$$

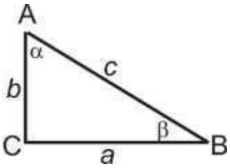
DODATAK – kratak pregled formula

Algebra

Stepenovanje: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

kvadratna jednačina: $ax^2 + bx + c = 0 \;\rightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Trigonometrija



$c^2 = a^2 + b^2$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}, \quad tg\beta = \frac{b}{a}$$

Trigonometrijske identičnosti: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Merenje uglova: $1rad = \dfrac{180^0}{\pi} \rightarrow 180^0 = \pi, \quad 30^0 = \dfrac{\pi}{6}, \quad 60^0 = \dfrac{\pi}{3}, \quad 45^0 = \dfrac{\pi}{4}, \quad 90^0 = \dfrac{\pi}{2}.$

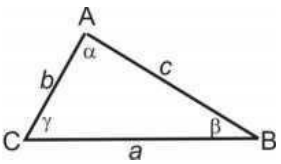
Adicione formule:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova:

α	0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1



Sinusna teorema: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Kosinusna teorema: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Izvodi $\; y = f(x) \rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}; \quad y = f(t) \rightarrow \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$

	osnovne funkcije							zbir	proizvod
funkcija	const.	x^n	t^n	$\sin x$	$\sin t$	$\cos x$	$\cos t$	$u+v$	uv
izvod f-je	0	nx^{n-1}	nt^{n-1}	$\cos x$	$\cos t$	$-\sin x$	$-\sin t$	$u'+v'$	$u'v+v'u$

Primeri: $y = x^2 \rightarrow y' = 2x; \quad y = t^3 \rightarrow \dot{y} = 3t^2; \quad x = 2 \rightarrow \dot{x} = 0; \quad x = t \rightarrow \dot{x} = 1$

$y = \cos t \rightarrow \dot{y} = -\sin t; \quad x = 4\sin t \rightarrow \dot{x} = 4\cos t; \quad y = 2t - 5\cos t \rightarrow \dot{y} = 2\cdot 1 - 5\cdot(-\sin t) = 2 + 5\sin t$

Izvod složene funkcije:

$u = u(v),\, v = v(x) \rightarrow u' = u'(v)\cdot v'(x) \qquad u = u(v),\, v = v(t) \rightarrow \dot{u} = \dot{u}(v)\cdot\dot{v}(t)$

$x = \cos 2t \rightarrow \dot{x} = (\cos 2t)' \cdot (2t)' = (-\sin 2t)\cdot(2\cdot 1) = -2\sin 2t$

$y = 5\sin\pi t \rightarrow \dot{y} = 5(\sin\pi t)' \cdot (\pi t)' = 5(\cos\pi t)\cdot(\pi\cdot 1) = 5\pi\cos\pi t$

Integrali

$\int dx = x + C \qquad \int dt = t + C \qquad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \sin t\, dt = -\cos t + C \qquad \int \cos t\, dt = \sin t + C$

Primeri: $\int 2t\,dt = 2\int t\,dt = 2\dfrac{t^2}{2} = t^2 + C \qquad \int(\cos t + 4t^2)dt = \sin t + 4\dfrac{t^3}{3} + C$