VISOKA TEHNIČKA MAŠINSKA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA
TRSTENIK

dr Milica Todorović
Ivana Terzić

TEHNIČKA MEHANIKA II

- Radni materijal-

Trstenik, 2018.

SADRŽAJ

LITERATURA

1) D. Đorđević, M. Todorović, Mehanika II (kinematika i dinamika), udžbenik, VTMŠ, 1998.
2) S. M. Targ, Teorijska mehanika - kratak kurs, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
3) D. Đorđević, Zbirka zadataka iz racionalne mehanike, VTMŠ, 2000..
4) I. Meščerski, Zbirka zadataka iz teorijske mehanike, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

UVOD. OSNOVNI POJMOVI

Mehanika je prirodno-matematička nauka u kojoj se izučavaju relativna kretanja tela u prostoru i vremenu. Tela međusobno deluju jedno na drugo a mera njihovog međudejstva je sila. Sila dovodi do promene stanja kretanja tela ili do njegove deformacije. Za potpuno određivanje sile potrebno je znati njenu veličinu, pravac, smer i napadnu tačku tj. sila je vektorska veličina. Jedinica za merenje je njutn ($1N=1kgm/s^2$).

Sila kojom planeta Zemlja deluje na materijalno telo na svojoj površini je sila teže ili težina tela G. Odnos težine tela i ubrzanja slobodnog pada u datoj tački je gravitaciona masa tela $\boldsymbol{m}$, $m=G/g$. Masa je mera sposobnosti tela da zadrži postojeće stanja kretanja ili mirovanja. To je pozitivna skalarna veličina, jedinica za merenje je kg.

Računanje vremena počinje, po pravilu, od trenutka od koga počinje i proučavanje kretanja. Vreme (tempus - t) je matematički gledano pozitivan, nezavisno promenljivi skalar, jedinica za merenje je s.

Materijalna tačka predstavlja model tela određene mase čije su dimenzije zanemarljivo male u upoređenju sa dimenzijama prostora u kome se telo kreće. Npr. planeta Zemlja se može smatrati materijalnom tačkom pri proučavanju njenog kretanja oko Sunca. Apsolutno kruto telo je telo (idealizovano) kod koga rastojanje između bilo koje dve tačke ostaje uvek nepromenjeno.

Da bi se definisalo kretanje tela ili materijalne tačke potrebno je odrediti njen položaj u koordinatnom sistemu u svakom vremenskom trenutku, odn. znati koordinate tačke u funkciji vremena. Kretanje tačke je po pravilu neprekidno, a putanja (trajektorija) tačke predstavlja niz uzastopnih položaja kroz koje tačka prolazi u toku kretanja. Prema obliku putanje sledi i prva podela kretanja tačke na pravolinijska i krivolinijska. Najčešće korišćeni koordinatni sistemi za analitičko opisivanje kretanja tačke su: Dekartov-pravougli, polarno-cilindrični i prirodni (krivolinijski) koordinatni sistem.

Najčešće se teorijska mehanika deli na: statiku, kinematiku i dinamiku.

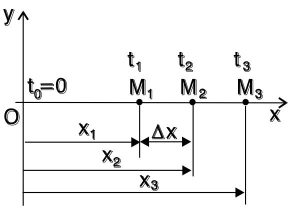
- Statika ispituje uslove ravnoteže tela pod uticajem sila, pri čemu su sila i dužina osnovne veličine. Statika predstavlja geometriju sila.

- Kinematika proučava kretanja tela sa geometrijskog stanovišta ne vodeći računa ni o uzrocima kretanja (silama) ni o materijalnosti tela koja se kreću, tj. kinematika je geometrija kretanja. Dužina i vreme su ovde osnovne veličine. Kinematika se deli na kinematiku tačke i kinematiku tela.

- Dinamika izučava kretanja tela uzimajući u obzir i njihovu masu i sile koje kretanje izazivaju. Dužina, vreme i masa su veličine kojima se ovde operiše.

1. KINEMATIKA TAČKE

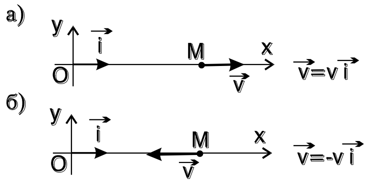
1.1.PRAVOLINIJSKO KRETANJE TAČKE



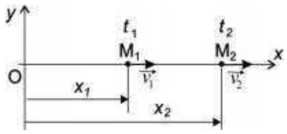
Pri kretanju tačka M zauzima u toku vremena niz uzastopnih položaja M_0, M_1, M_2,... na njenoj pravolinijskoj putanji. Položaj tačke M u svakom vremenskom trenutku biće poznat ako se zna jednačina pravolinijskog kretanja ili zakon kretanja: $\boxed{x=x(t)}$.

Ako koordinata *x* raste sa porastom vremena *t*, kretanje je *pravo*, u protivnom ono je *povratno*. Veličina *x* u jednačini $x=x(t)$ određuje položaj tačke, a ne pređeni put. Ako u intervalu $\Delta t=t_2-t_1$ tačka pređe put $\Delta x=x_2-x_1$ srednja brzina tačke se definiše $v_{sr}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$,odnosno $\boxed{v_{sr}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}.}$

Trenutna brzina, tj. brzina tačke u datom vremenskom trenutku, biće jednaka $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}$, odnosno $\boxed{v=\dot{x}.}$ Tačka iznad *x* označava izvod promenljive x po vremenu. Ovu notaciju je u naučnu literaturu uveo Njutn.



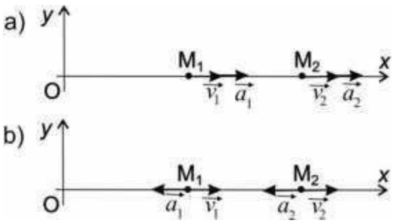
Ako koordinata *x* tokom vremena raste vektor brzine ima smer *Ox* ose, $\vec{v}=v\cdot\vec{i}$, a ako se smanjuje biće $\vec{v}=-v\cdot\vec{i}$. Dakle vektor brzine ima pravac i smer kretanja. Dimenzija brzine je količnik dužine i vremena, pa je jedinica za brzinu *m/s* (*cm/s, km/h*).



Ako se brzina tačke menja se brzina tačke menja, pa je u intervalu *Δt* promena brzine*Δv*, srednje ubrzanje je $a_{sr}=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ tj. $\boxed{a_{sr}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}.}$

Trenutno ubrzanje računa se $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$, $\boxed{a=\ddot{x},}$

tj. jednako je drugom izvodu pomeranja po vremenu. Jedinica za ubrzanje je m/s^2.



Brzina i ubrzanje su vektori koji imaju pravac putanje. Vektor ubrzanja tačke može imati isti smer sa vektorom brzine, u smeru kretanja, kada je kretanje ubrzano (na slici slučaj a) ili su smerovi suprotni kada je kretanje usporeno (slučaj b). Primer ubrzanog kretanja je slobodni pad a usporenog vertikalni hitac. Prema karakteru brzine, kretanja tačke mogu biti:

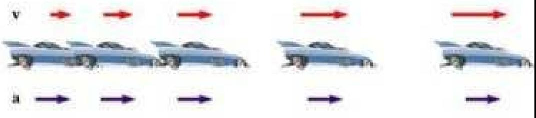
1) ravnomerna (jednolika) ako je *v=const.*

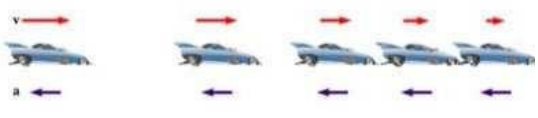
položaj tačke: $x=x_0+vt$;

pređeni put: $\boxed{s=vt}$ brzina: $\boxed{v=\dfrac{s}{t}.}$

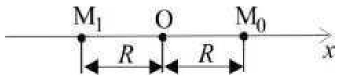
2) promenljiva - ubrzana ili *usporena* ako je *a=const.*

položaj tačke: $x=x_0+v_0t\pm\dfrac{1}{2}at^2$; pređeni put: $\boxed{s=v_0t\pm\dfrac{1}{2}at^2}$; brzina: $\boxed{v=v_0\pm at}$





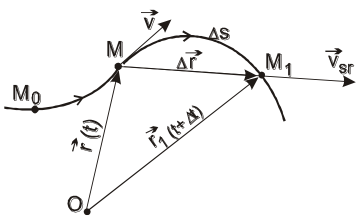
Pravolinijsko kretanje tačke pri kome se rastojanje x od koordinatnog početka O menja po zakonu $\boxed{x = R\cos\omega t}$, gde su R i ω konstantne veličine, naziva se <u>prosto harmonijsko oscilovanje</u>. Tačka M vrši oscilatorno kretanje između položaja M_0 i M_1, počinjući kretanje iz položaja M_0 da bi ponovo došla u isti položaj u trenutku $t_1 = 2\pi/\omega$ (kada je $\cos\omega t_1 = 1$).



Veličina R predstavlja najveće udaljenje od centra oscilovanja O i naziva se <u>amplituda oscilovanja</u>. <u>Period oscilovanja</u> je vremenski interval $T = t_1 = 2\pi/\omega$ u kome tačka izvrši jednu punu oscilaciju. Izrazi za brzinu $v = -R\omega\sin\omega t$ i ubrzanje $a = -R\omega^2\cos\omega t$ pokazuju promenu ovih veličina, tokom vremena, po harmonijskom zakonu. U trenutku kada se tačka nađe u centru oscilovanja O intenzitet brzine ima maksimalnu vrednost dok je ubrzanje jednako nuli. U krajnjim položajima M_0 i M_1, brzina tačke je jednaka nuli a intenzitet ubrzanja ima maksimalnu vrednost.
Ako je zakon oscilovanja $x = R\sin\omega t$ kretanje tačke počinje iz centra O.

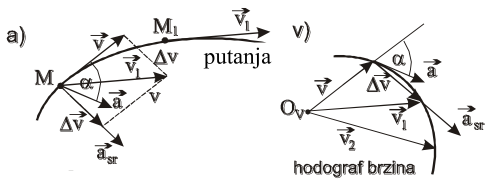
1.2. <u>KRIVOLINIJSKO KRETANJE TAČKE</u>

1.2.1. <u>Vektorski način definisanja</u>



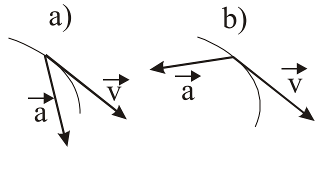
Putanja tačke je kriva linija. Položaj pokretne tačke u prostoru se određuje vektorom položaja $\vec{r}$ pa je $\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)}$ <u>jednačina kretanja</u>.
Promenom položaja tačke dobijamo novi vektor položaja $\vec{r}_1(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$.
Promena vektora položaja $\Delta\vec{r}$ (duž tetive MM_1), u intervalu Δt definiše <u>vektor srednje brzine</u> $\boxed{\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$.

<u>Vektor trenutne brzine</u> jednak je $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ tj. $\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}}}$. Vektor brzine ima pravac tangente na putanju a smer kretanja. Pri kretanju po krivolinijskoj putanji pravac brzine se neprekidno menja. Ako vektore $\vec{v}_1, \ldots\ldots \vec{v}_4$ translatorno dovedemo na zajednički početak O_V, njihovi vrhovi čine liniju *-**hodograf brzina.***



Pri krivolinijskom kretanju vektor brzine tačke može da se menja po pravcu, smeru i intenzitetu.

Promena vektora brzine u vremenskom intervalu je $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$, pa je <u>vektor srednjeg ubrzanja</u> $\boxed{\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$. Vektor srednjeg ubrzanja $\vec{a}_{sr}$ ima pravac i smer vektora $\Delta\vec{v}$, odnosno usmeren je u konkavnu stranu putanje tačke. <u>Vektor trenutnog ubrzanja</u> jednak je $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$ tj. $\boxed{\vec{a} = \ddot{\vec{r}}.}$

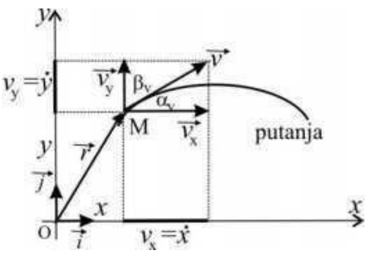


Vektor trenutnog ubrzanja $\vec{a}$ je usmeren u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje, to je vektor vezan za tačku, i sa vektorom brzine zaklapa ugao α, koji se može menjati od 0 do 180^0. Ako intenzitet brzine sa vremenom raste, tj. kod <u>ubrzanog</u> kretanja taj ugao je oštar (na slici pod a); kod <u>usporenog</u> kretanja ugao je tup (na slici pod b).
Za vektorsko opisivanje krivolinijskog kretanja potrebno je imati tri kinematičke karakteristike: vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}(t)$, vektor brzine tačke $\vec{v} = \vec{v}(t)$ i vektor ubrzanja tačke $\vec{a} = \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.

1.2.2. Analitički način opisivanja u Dekartovom koordinatnom sistemu

Projekcije vektora položaja $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}$ u Dekartovom pravouglom sistemu su *x(t), y(t)* i *z(t)*. Skalarne jednačine *x=x(t), y=y(t), z=z(t)* se zovu parametarske jednačine kretanja.

Eliminacijom parametra *t* iz jednačina kretanja dobija se linija putanje.
Vektor položaja tačke u ravni glasi $\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}}$ pa su jednačine kretanja $\boxed{x=x(t),\ y=y(t)}$.



Vektor brzine tačke određuje se izračunavanjem izvoda vektora položaja po vremenu $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Pošto su $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ konstantni vektori sledi izraz za vektor brzine u ravni

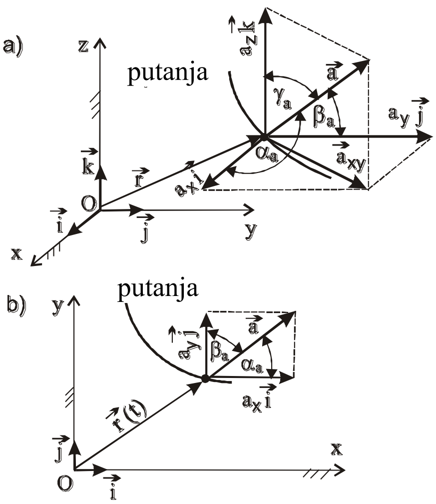
$\boxed{\vec{v}=v_x\cdot\vec{i}+v_y\cdot\vec{j}=\dot{x}\cdot\vec{i}+\dot{y}\cdot\vec{j}}$. Karakteristike tog vektora su:

projekcije: $v_x=\dot{x},\quad v_y=\dot{y}$; intenzitet: $\boxed{v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$

a pravac i smer određuju uglovi: $\cos\alpha_v=\dfrac{\dot{x}}{v},\ \cos\beta_v=\dfrac{\dot{y}}{v}$.

Za prostor važi: $v=v(t)=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$,

$$\cos\alpha_v=\frac{\dot{x}}{v},\ \cos\beta_v=\frac{\dot{y}}{v},\ \cos\gamma_v=\frac{\dot{z}}{v}.$$

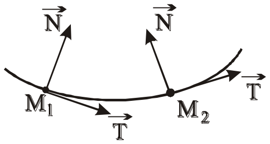


Određivanje vektora ubrzanja $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$, vrši se preko izvoda brzine $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$. Vektor ubrzanja u ravni određen je izrazom $\boxed{\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{x}\cdot\vec{i}+\ddot{y}\cdot\vec{j}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}}$, ima projekcije $a_x=\ddot{x},\quad a_y=\ddot{y}$, intenzitet $\boxed{a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}}$ a pravac i smer određen uglovima $\cos\alpha_a=\dfrac{\ddot{x}}{a},\ \cos\beta_a=\dfrac{\ddot{y}}{a}$.

Za prostor (slika pod a) važi: $a=a(t)=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$

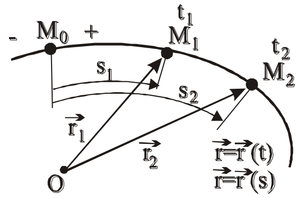
$$cos\,\alpha_a=\frac{\ddot{x}}{a},\ cos\,\beta_a=\frac{\ddot{y}}{a},\ cos\,\gamma_a=\frac{\ddot{z}}{a}.$$

Ukoliko su poznati zakoni kretanja: *x=x(t), y=y(t), z=z(t),* treba primeniti postupak diferenciranja da bi se odredili brzina i ubrzanje tačke. Ako je potrebno iz poznatih projekcija brzine ili ubrzanja odrediti jednačine kretanja, tada se diferencijalne jednačine integrale.



1.2.3. Prirodni način definisanja

Kada je linija putanje poznata ona se može uzeti kao krivolinijska koordinatna osa. Koordinatni početak M prirodnog koordinatnog sistema vezan je za pokretnu tačku, pri čemu ose ostaju međusobno upravne ali menjaju svoj pravac u prostoru. Ortovi su jedinični vektori tangente i normale, u toku kretanja ostaju konstantnog jediničnog intenziteta ali se menjaju po pravcu i smeru. Krivolinijska koordinata *s* menja se tokom kretanja pa je jednačina kretanja $\boxed{s=s(t).}$ Kretanje tačke iz položaja M_1 u položaj M_2



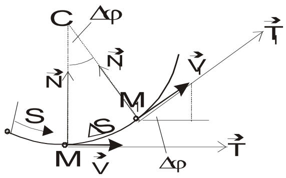
putem Δs odvija u vremenu $\Delta t=t_2-t_1$, pa je srednja brzina $\boxed{v_{sr}=\frac{\Delta s}{\Delta t}}$.

Intenzitet trenutne brzine jednak je: $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\dot{s}.$ tj. $\boxed{v=\dot{s}.}$. Vektor trenutne brzine je pravca tangente, u smeru kretanja.

Iz izraza za brzinu $ds=vdt$ dobija se obrazac po kome se određuje pređeni put: $\boxed{s=\int vdt}$.

Vektor ubrzanja tačke jednak je $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}_1-\vec{v}}{\Delta t}.$

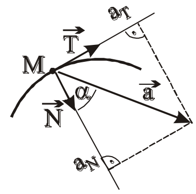
Projektovanjem vektora $\vec{a}$ na pravac tangente dobija se:



$$a_T=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_{1T}-v_T}{\Delta t}=\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}}\frac{v_1\cos\Delta\varphi-v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\ddot{s}.$$

Veličina tangencijalnog ubrzanja računa se po obrascu: $\boxed{a_T=\frac{dv}{dt}}$.

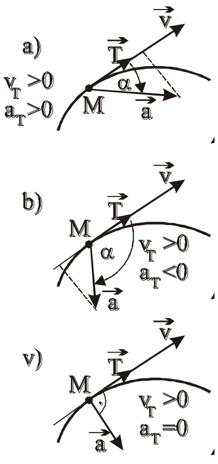
Projekcija vektora ubrzanja na pravac normale daje normalno ubrzanje:



$$a_N=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_{1N}-v_N}{\Delta t}=v\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}=v\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s};$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v;\quad \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{R_K};\quad a_N=v\cdot v\cdot\frac{1}{R_K}=\frac{v^2}{R_K}.$$

($CM=R_K$ poluprečnik krivine a $K=1/R_K$ je krivina krive).



Veličina normalnog ubrzanja je: $\boxed{a_N=\frac{v^2}{R_K}}$ a

veličina ukupnog ubrzanja biće: $\boxed{a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}}$.

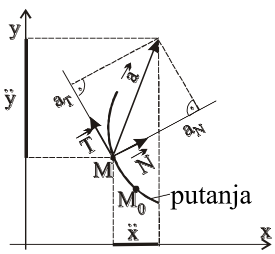
Pravac i smer vektora ubrzanja definisan je uglom $\boxed{tg\alpha=\frac{|a_T|}{a_N}}$.

Komponenta $\vec{a}_T$ može biti orijentisana u smeru orta tangente ili suprotno; kao izvod brzine po vremenu, karakteriše promenu brzine. Kretanje tačke M je ubrzano u slučajevima kada je ugao između vektora brzine i vektora ubrzanja oštar (na slici pod a); ako je taj ugao tup kretanje tačke je usporeno (na sl. b).

Ravnomerno kretanje tačke se karakteriše sa $a_T=0$ kada je intenzitet brzine $v=const.$; a ubrzanje tačke se svodi na normalno ubrzanje (na slici pod v).

1.2.4 Veza između projekcija ubrzanja na prirodne i Dekartove ose u ravni

U toku vremena se menjaju komponente brzine $\dot{x}=\dot{x}(t),\ \dot{y}=\dot{y}(t)$) i koordinate tačke $x=x(t),\ y=y(t)$. Diferenciranjem kvadrata brzine po vremenu:

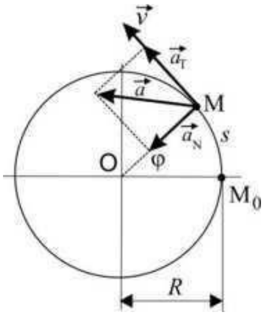


$2v\frac{dv}{dt}=2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}\,/:2\Rightarrow\frac{dv}{dt}=a_T=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{v}$, dobija se izraz za tangencijalno ubrzanje $\boxed{a_T=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{v}}$. Koristeći izraz za veličinu ukupnog ubrzanja tačke: $a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2;\ a^2=a_N^2+a_T^2\Rightarrow a_N^2=\frac{(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2}{v^2}$, dobija se izraz za normalno ubrzanje $\boxed{a_N=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{v}}$. Znak apsolutne vrednosti stoji u ovom izrazu zato što je normalno ubrzanje uvek usmereno ka centru krivine krivolinijske putanje.

Poluprečnik krivine R može se odrediti: $\boxed{R_K = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}|}.}$ ili: $R_K = \frac{1}{K} = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''}.$

1.2.5. Kružno kretanje

To je krivolinijsko kretanje pri kome se tačka kreće po kružnoj putanje. Takva vrsta kretanja je jako česta u prirodi i u tehnici. Položaj tačke na kružnoj putanji određen je prirodnom krivolinijskom koordinatom s koja se može izraziti preko ugla φ i poluprečnika kružne putanje R: $\boxed{s=R\varphi.}$



Kada je poznat zakon promene ugla $\varphi=\varphi(t)$ onda se mogu odrediti:

brzina $\boxed{v = \dot{s} = R\dot{\varphi}.}$,

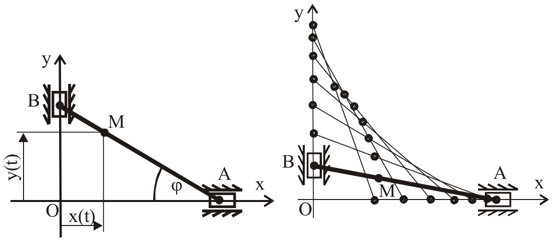
tangencijalno i normalno ubrzanje $\boxed{a_T = \ddot{s} = R\ddot{\varphi} \qquad a_N = \frac{v^2}{R_k} = \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R} = R\dot{\varphi}^2}$

i ukupno ubrzanje $\boxed{a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = R\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}.}$

Za ravnomerno (jednoliko) kružno kretanje brzina ima konstantnu veličinu $v = R\dot{\varphi} = const.$ što znači da je $\dot{\varphi} = \omega = const.$ Veličina ω je kružna frekvencija ili ugaona brzina a njena jedinica je *rad/s*.U slučaju ravnomernog kretanja tangencijalno ubrzanje je jednako nuli pa je ukupno ubrzanje $a = a_N = R\omega^2 = const.$ a vektor ubrzanja ima pravac poluprečnika i usmeren je ka centru putanje O.

PRIMERI KRETANJA TAČKE:

Na lenjiru elipsografa (na slici desno prikazan u 7 položaja), krajnje tačke A i B kreću se po pravolinijskim putanjama (horizontalnoj i vertikalnoj) dok se tačka M kreće po krivolinijskoj - eliptičnoj putanji.



1.3. ZADACI IZ KINEMATIKE TAČKE

ZADATAK 1.1. (**usporeno kretanje**): Voz koji se kretao brzinom $v_0=54km/h$, zaustavio se u toku vremena $t_1=2min$ posle početka kočenja. Smatrajući da se voz za vreme kočenja kretao sa konstantnim usporenjem, odrediti pređeni put za vreme kočenja.

Rešenje: Pošto je kretanje usporeno slede izrazi za pređeni put i brzinu tačke u obliku: $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, $v = v_0 - at$. Brzinu $v_0=54km/h$ treba pretvoriti u m/s a vreme $t_1=2min$ u sekunde, pa je $v_0 = 54\frac{km}{h} = 54\frac{1000m}{3600s} = \frac{54}{3{,}6} = 15\frac{m}{s}$, $t_1 = 120s$. U trenutku kočenja $t=t_1$ je brzina $v=0$ pa iz druge jednačine sledi: $v = v_0 - at \rightarrow 0 = v_0 - at_1 \rightarrow at_1 = v_0 \rightarrow a = \frac{v_0}{t_1} = \frac{15}{120} = 0{,}125\frac{m}{s^2}$.

Pređeni put je jednak: $s = v_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = 15\cdot 120 - 0{,}5\cdot 0{,}125\cdot 120^2 = 900m$.

ZADATAK 1.2. (**usporeno kretanje**): Na suvom asfaltu automobil prilikom kočenja usporava sa $a_1=7m/s^2$, dok se pri mokrom asfaltu usporenje smanjuje na $a_2=5m/s^2$. Odrediti nakon koliko pređenih metara se, prilikom kočenja, automobil koji se kretao brzinom *108km/h* zaustavlja (a) ako se kreće po suvom, (b) ako se kreće po vlažnom kolovozu.

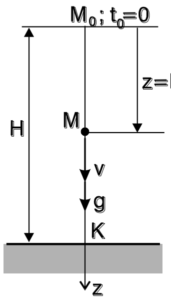
Rešenje: Za usporeno kretanje važe jednačine: $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, $v = v_0 - at$.

Dalje je $v_0 = 108\frac{km}{h} = \frac{108}{3,6} = 30\frac{m}{s}$, $v_1 = 0$ pa važi jednačina $0 = v_0 - at$.

a) suvi asfalt: $a_1 t_1 = v_0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{30}{7} = 4,28s \rightarrow s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 30 \cdot 4,28 - 0,5 \cdot 7 \cdot 4,28^2 = 64,29m$

b) mokri asfalt: $a_2 t_2 = v_0 \rightarrow t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{30}{5} = 6s \rightarrow s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = 30 \cdot 6 - 0,5 \cdot 5 \cdot 6^2 = 90m$

ZADATAK 1.3. (**slobodni pad**): Tačka slobodno pada ($v_0=0$) sa visine $H=4m$ na površinu Zemlje. Zanemarujući otpor vazduha, naći zakon kretanja i brzinu tačke, potom brzinu koju će tačka imati u trenutku pada kao i vreme padanja.



Rešenje: Tačka pada (bez početne brzine) jednako ubrzano sa konstantnim ubrzanjem Zemljine teže *g* pa se mogu primeniti obrasci:

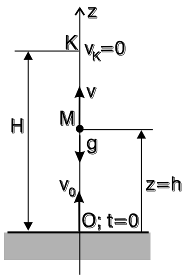
$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$, $v = v_0 + at \rightarrow v = gt$; odakle sledi:

$$H = h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 4 = 0,5 \cdot 9,81 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = \frac{4}{4,905} \rightarrow t = \sqrt{\frac{4}{4,905}} = 0,903\,s$$

$$v = gt = 9,81 \cdot 0,903 = 8,86\frac{m}{s}$$

ZADATAK 1.4. (**vertikalni hitac**): Tačka se kreće vertikalno uvis sa početnom brzinom $v_0=20m/s$. Zanemarujući otpor vazduha odrediti visinu penjanja i vreme penjanja.

Rešenje: Tačka se kreće jednako usporeno sa konstantnim usporenjem Zemljine teže *g* pa se mogu primeniti obrasci: $v = v_0 - gt$, $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.



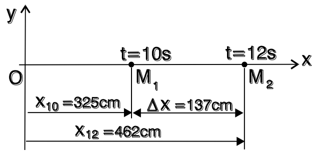
Na kraju kretanja (penjanja) tačka se zaustavi, tj. $v_K=0$ za $h=H$,

vreme penjanja: $0 = v_0 - gt \rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{9,81} = 2,039\,s$

visina penjanja:

$$H = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 9,81} = 20,39m$$

ZADATAK 1.5. (**srednja i trenutna brzina**):Tačka se kreće pravolinijski po zakonu $x=2,5t+3t^2$ (x - cm, t - s). Naći srednju brzinu u intervalu između $t_1=10s$ i $t_2=12s$, i brzine nakon $9s$ i $12s$.



Rešenje:

$x(10) = 2,5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 = 325cm$; $x(12) = 2,5 \cdot 12 + 3 \cdot 12^2 = 462cm$;

$\Delta x = x(12) - x(10) = 137cm$; $\Delta t = 12 - 10 = 2s$; $v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{137}{2} = 68,5\frac{cm}{s}$.

Trenutne brzine su jednake: $v = \dot{x} = 2,5 + 6t$, i to: v(9)=2,5+6·9=56,5cm/s; v(12)=2,5+6·12=74,5cm/s.

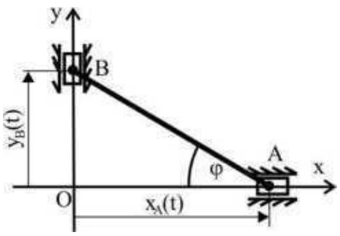
ZADATAK 1.6. (**ubrzano, ravnomerno i usporeno kretanje**):Tramvaj se kreće iz mirovanja jednako ubrzano, ubrzanjem od $0,5\ m/s^2$, za vreme od $20s$. Zatim se kreće jednoliko i pre semafora počinje usporavati usporenjem od $1\ m/s^2$ tako da bi se pred semaforom zaustavio. Ukupna vožnja trajala je $80s$. Odrediti pređene puteve po deonicama.

Rešenje: Za jednako ubrzano kretanje važe jednačine: $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $v = v_0 + at$.

Za prvu deonicu, bez početne brzine, biće: $s_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 20^2 = 100m,\quad v_1 = at_1 = 0{,}5\cdot 20 = 10m/s.$

Za treću deonicu sa jednako usporenim kretanjem važi: $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, $v = v_0 - at$. Na kraju treće deonice je: $v = 0 \rightarrow \quad 0 = 10 - 1\cdot t_3 \quad \rightarrow \quad t_3 = 10\,s$, pa je $s_3 = v_1 t_3 - \frac{1}{2}at_3^2 = 10\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2 = 50m$.

Vreme ravnomernog kretanja (druga deonica), je $t_2 = 80 - 20 - 10 = 50s$, pa je pređeni put u drugoj deonici jednak $s_2 = v_1 \cdot t_2 = 10\cdot 50 = 500m$.



ZADATAK 1.7. (**harmonijsko oscilovanje**):Klizači A i B koji su spojeni polugom dužine *L=0,5m* kreću se po međusobno upravnim pravama. Odrediti zakone kretanja klizača ako se ugao φ između poluge AB i O*x* ose menja po zakonu $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{12}t$. Odrediti brzine i ubrzanja klizača u trenutku *t=2s*.

Rešenje: Sa slike se vidi da koordinate, odnosno jednačine kretanja

$x_A(t) = L\cos\varphi = L\cos\frac{\pi t}{12}$, $y_B(t) = L\sin\varphi = L\sin\frac{\pi t}{12}$, opisuju harmonijsko oscilovanje.

Diferenciranjem ovih izraza dobijamo brzine i ubrzanja klizača:

$$v_A = \dot{x}_A = -0{,}5\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi t}{12} = -\frac{\pi}{24}\sin\frac{\pi t}{12},\; v_B = \dot{y}_B = 0{,}5\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi t}{12},$$

$$a_A = \ddot{x}_A = -\frac{\pi}{24}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{12} = -\frac{\pi^2}{288}\cos\frac{\pi t}{12},\; a_B = \ddot{y}_B = -\frac{\pi}{24}\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi t}{12} = -\frac{\pi^2}{288}\sin\frac{\pi t}{12}.$$

U trenutku *t=2s* imaćemo

$$v_A = -\frac{\pi}{24}sin\frac{\pi\cdot 2}{12} = -\frac{\pi}{24}sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{24}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{48} = -0{,}0654\frac{m}{s},$$

$$v_B = \frac{\pi}{24}cos\frac{\pi\cdot 2}{12} = \frac{\pi}{24}cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{48} = 0{,}113\frac{m}{s},$$

$$a_A = -\frac{\pi^2}{288}cos\frac{\pi\cdot 2}{12} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{576} = -0{,}0296\frac{m}{s^2},\; a_B = -\frac{\pi^2}{288}sin\frac{\pi\cdot 2}{12} = -\frac{\pi^2}{576} = -0{,}017\frac{m}{s^2}.$$

Znaci ovih veličina pokazuju smerove vektora brzina i ubrzanja. U datom trenutku klizač A se kreće u smeru ka tački O ubrzano (vektori $\vec{v}_A$ *i* $\vec{a}_A$ su istog znaka, dakle istog smera), klizač B kreće se u smeru *Oy* ose usporeno (vektori $\vec{v}_B$ *i* $\vec{a}_B$ su suprotnog smera).

ZADATAK 1.8. (**kružno kretanje**): Automobil se kreće putem poluprečnika krivine *500m*, sa tangencijalnim ubrzanjem *0,5m/s²*. Izračunati normalno i ukupno ubrzanje automobila u trenutku kada mu je brzina *72km/h*.

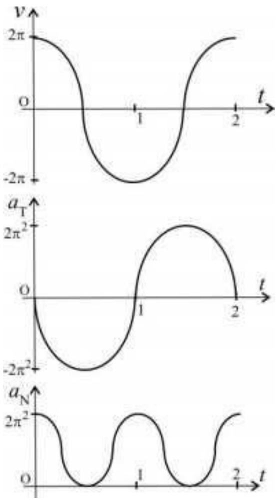
Rešenje: Brzini od *72km/h* odgovara brzina od *20m/s*. Normalno ubrzanje je jednako: $a_N = v^2/R = 20^2/500 = 0{,}8m/s^2$ a ukupno ubrzanje $a = \sqrt{(a_T)^2 + (a_N)^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}8^2} = 0{,}94m/s^2$.

ZADATAK 1.9. (**kružno kretanje**): Po krugu poluprečnika *2m*, kreće se tačka po zakonu *s=2sinπt* (pređeni put *s* je dat u *m* a vreme *t* u *s*). Odrediti brzinu, tangencijalno, normalno i ukupno ubrzanje tačke u trenutku*t=5s*. Konstruisati dijagrame brzina - vreme, tangencijalno i normalno ubrzanje – vreme.

Rešenje: Primenom obrazaca za kinematske veličine pri kružnom kretanju dobija se:

brzina $v = \dot{s} = 2\pi\, cos\, \pi t$,tangencijalno $a_T = \ddot{s} = -2\pi^2\, sin\, \pi t$ i normalno ubrzanje

$a_N = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(2\pi\, cos\, \pi t)^2}{2} = 2\pi^2 cos^2 \pi t$ i ukupno ubrzanje $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 2\pi^2 \sqrt{sin^2 \pi t + cos^4 \pi t}$.



U trenutku *t=1s* ove veličine imaju vrednosti:

$$v = 2\pi\, cos\, \pi = 2\pi \cdot (-1) = -6{,}28 \frac{m}{s},$$

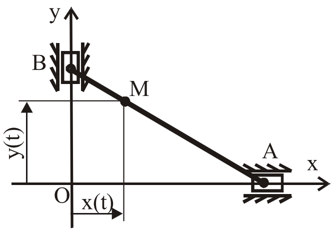
$$a_T = -2\pi^2\, sin\, \pi = -2\pi^2 \cdot 0 = 0,$$

$$a_N = 2\pi^2 cos^2 \pi = 2\pi^2 \frac{m}{s^2},$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = a_N = 2\pi^2 \frac{m}{s^2}.$$

Na dijagramima su prikazane zavisno od vremena:
promena brzine (kosinusna funkcija),
promena tangencijalnog ubrzanja (negativna sinusna funkcija) i
promena normalnog ubrzanja (kvadrat kosinusne funkcije).

<u>ZADATAK 1.10. (**putanja je elipsa**):</u> Krajevi A i B lenjira elipsografa klize po uzajamno ortogonalnim pravcima *Ox* i *Oy*. Jednačine kretanja tačke M na lenjiru glase: *x=2sin4t*, *y=3cos4t* (koordinate *x* i *y* su date u *cm* a vreme *t* u sekundama).



a) Naći putanju tačke i nacrtati je. Zatim odrediti početni položaj tačke na putanji i smer njenog kretanja.

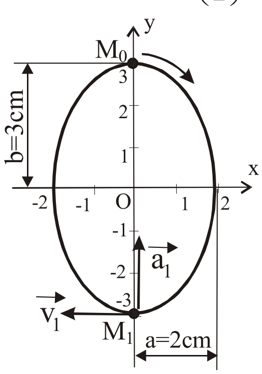
b) Naći brzinu i ubrzanje tačke u funkciji vremena.

c) Odrediti položaj tačke, brzinu i ubrzanje u trenutku $t_1 = \dfrac{\pi}{4} s$.

Rešenje: a) Da bi odredili jednačinu putanje iz jednačina kretanja treba eliminisati vreme.

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\, sin\, 4t \\ y &= 3\, cos\, 4t \end{aligned}\right\} \rightarrow deljenje\ jedn. \left.\begin{aligned} x &= 2\, sin\, 4t\ /:2 \\ y &= 3\, cos\, 4t\ /:3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x}{2} &= sin\, 4t \\ \frac{y}{3} &= cos\, 4t \end{aligned}\right\} \rightarrow kvadriranje\ jedn. \left.\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= sin^2 4t \\ \left(\frac{y}{3}\right)^2 &= cos^2 4t \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow sabiranje\ jedn. \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = sin^2 4t + cos^2 4t.$$



Pošto je $sin^2 4t + cos^2 4t = 1$ konačno se dobija <u>jednačina putanje</u> tj. jednačina elipse: $\boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.}$ Poluose elipse iznose *a=2cm* i *b=3cm* a centar elipse je u koordinatnom početku.

<u>Početni položaj tačke na putanji</u>:
za $t=0 \rightarrow x_0 = 2sin0 = 2 \cdot 0 = 0;\ y_0 = 3cos0 = 3 \cdot 1 = 3;\ \rightarrow M_0(0;3)$.
<u>Smer kretanja tačke</u>: sa porastom vremena (*sin4t*) tj. *x=2sin4t* raste → tačka se kreće od položaja M_0 udesno.

b) Da bi odredili izraze za brzinu i ubrzanje tačke potrebno je naći <u>izvode jednačina kretanja po vremenu</u>:

$x=2sin4t \rightarrow \dot{x}=2(sin\,4t)'\cdot(4t)'=2(cos\,4t)\cdot 4=8cos\,4t$;

$\ddot{x}=8(cos\,4t)'\cdot(4t)'=8(-sin\,4t)\cdot 4=-32sin\,4t;$

$y=3cos4t \rightarrow \dot{y}=3(cos\,4t)'\cdot(4t)'=3(-sin\,4t)\cdot 4=-12sin\,4t;$

$\ddot{y}=-12(sin\,4t)'(4t)'=-12(cos\,4t)\cdot 4=-48cos\,4t;$

<u>Brzina tačke u funkciji vremena</u>:

$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{(8cos\,4t)^2+(-12sin\,4t)^2}=\sqrt{64cos^2 4t+144sin^2 4t}$.

<u>Ubrzanje tačke u funk. vrem.</u>: $a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(-32sin\,4t)^2+(-48cos\,4t)^2}=\sqrt{32^2 sin^2 4t+48^2 cos^2 4t}$.

c) <u>Položaj tačke u trenutku t_1</u>$=\frac{\pi}{4}s$: $x_1=2sin\,4\frac{\pi}{4}=2\cdot sin\pi=2\cdot 0=0;$ $y_1=3cos\pi=3\cdot(-1)=-3; \rightarrow M_1(0;-3).$

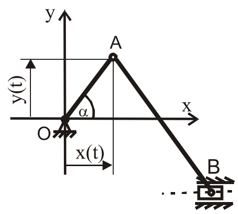
<u>Brzina i ubrzanje tačke u trenutku t_1</u>$=\frac{\pi}{4}s$: (brzina ima pravac tangente na putanju, u smeru kretanja)

$$v_1=\sqrt{64cos^2 4\frac{\pi}{4}+144sin^2 4\frac{\pi}{4}}=\sqrt{64cos^2\pi+144sin^2\pi}=\sqrt{64(-1)^2+144\cdot 0}=\sqrt{64\cdot 1}=\sqrt{64}=8\frac{cm}{s}.$$

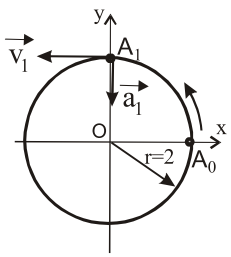
$$a_1=\sqrt{32^2 sin^2 4\frac{\pi}{4}+48^2 cos^2 4\frac{\pi}{4}}=\sqrt{32^2 sin^2\pi+48^2 cos^2\pi}=\sqrt{32^2\cdot 0+48^2(-1)^2}=\sqrt{48^2}=48\frac{cm}{s^2}.$$

Projekcije ubrzanja: $a_x=\ddot{x}=-32sin\,\pi=-32\cdot 0=0;$ $a_y=\ddot{y}=-48cos\,\pi=-48\cdot(-1)=48\frac{cm}{s^2}.$

Dakle ubrzanje u trenutku t_1 ima samo komponentu u smeru *Oy* ose, pa ga tako ucrtavamo na slici.



<u>ZADATAK 1.11. (**putanja je kružnica**)</u>: Kraj A, poluge *OA=2m* u prikazanom mehanizmu, kreće se po zakonima kretanja koji glase: $x=2cos\,\pi t$, $y=2sin\,\pi t$ (vreme *t* u sekundama). a) Naći putanju tačke i nacrtati je. Zatim odrediti početni položaj tačke na putanji i smer njenog kretanja.
b) Naći brzinu, tangencijalno i normalno ubrzanje tačke u funkciji vremena.
c) Odrediti položaj tačke, brzinu i ubrzanje u trenutku $t_1=0,5s$.



<u>*Rešenje*</u>: a) Jednačinu putanje određujemo tako što iz jednačina kretanja eliminišemo vreme.

$$\left.\begin{matrix} x=2\,cos\,\pi t \\ y=2\,sin\,\pi t\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix} (x=2\,cos\,\pi t)^2 \\ (y=2\,sin\,\pi t)^2\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix} x^2=2^2\,cos^2\,\pi t \\ y^2=2^2\,sin^2\,\pi t\end{matrix}\right\}\rightarrow$$

$$sabiranje\quad x^2+y^2=2^2\left(cos^2\,\pi t+sin^2\,\pi t\right)$$

Pošto je $sin^2\,\pi t+cos^2\,\pi t=1$ dobija se <u>jednačina putanje</u> (kružnice): $\boxed{x^2+y^2=4}$. Poluprečnik kružnice iznosi *r=2m* a centar je u koordinatnom početku.

<u>Početni položaj tačke</u>: za $t=0\rightarrow x_0=2cos0=2\cdot 1=2;$ $y_0=2sin0=2\cdot 0=0;\rightarrow A_0(2;0)$.

<u>Smer kretanja tačke</u>: sa porastom vremena ($sin\,\pi t$) tj. $y=2sin\,\pi t$ raste → tačka se kreće od položaja A_0 nagore.

b) Potrebno je naći <u>izvode jednačina kretanja po vremenu</u>:

$x=2cos\,\pi t \rightarrow \dot{x}=2(cos\,\pi t)'\cdot(\pi t)'=2(-sin\,\pi t)\cdot\pi=-2\pi sin\,\pi t;\ \ddot{x}=-2\pi(sin\,\pi t)'\cdot(\pi t)'=-2\pi^2 cos\,\pi t;$

$y=2sin\,\pi t \rightarrow \dot{y}=2(sin\,\pi t)'\cdot(\pi t)'=2(cos\,\pi t)\cdot\pi=2\pi cos\,\pi t;\ \ddot{y}=2\pi(cos\,\pi t)'\cdot(\pi t)'=2\pi(-sin\,\pi t)\cdot\pi=-2\pi^2 sin\,\pi t;$

<u>Brzina tačke:</u> $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{4\pi^2 sin^2\,\pi t+4\pi^2 cos^2\,\pi t}=\sqrt{4\pi^2\left(sin^2\,\pi t+cos^2\,\pi t\right)}=\sqrt{4\pi^2}=2\pi\frac{m}{s}=const.$

Ubrzanje: $a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{4\pi^4 cos^2\pi t+4\pi^4 sin^2\pi t}=\sqrt{4\pi^4\left(cos^2\pi t+sin^2\pi t\right)}=\sqrt{4\pi^4}=2\pi^2\frac{m}{s^2}=const.$

Tangencijalno ubrzanje: $a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{d(2\pi)}{dt}=0$; normalno ubrzanje: $a_N=\frac{v^2}{R_K}=\frac{(2\pi)^2}{2}=\frac{4\pi^2}{2}=2\pi^2\frac{m}{s^2}$.

c) Položaj tačke u trenutku $t_1=\frac{1}{2}s=0,5s$: $x_1=2cos\frac{\pi}{2}=2\cdot 0=0$; $y_1=2sin\frac{\pi}{2}=2\cdot 1=2$; $\rightarrow A_1(0;2)$.

Brzina tačke u trenutku $t_1=\frac{1}{2}s=0,5s$: $v_1=2\pi\frac{m}{s}$ (u pravcu tangente na putanju, u smeru kretanja).

Ubrzanje tačke u trenutku $t_1=\frac{1}{2}s=0,5s$: $a_1=2\pi^2\frac{m}{s^2}=a_N$; pošto je tangencijalna komponenta ubrzanja jednaka nuli, ucrtavamo samo normalnu komponentu ubrzanja, usmerenu ka centru putanje.

ZADATAK 1.12. (**putanja je kružnica**): Date su jednačine kretanja tačke $x=3sint+4$, $y=3cost-1$, gde se x, y u cm; t je u s. Naći: a) putanju tačke; b) vrednosti brzine i komponenti ubrzanja u funkciji vremena $v(t)=?, a_T(t)=?, a_N(t)=?$; c) položaj tačke, brzinu i ubrzanje u određenom trenutku.

Rešenje:

a) Određivanje putanje tačke

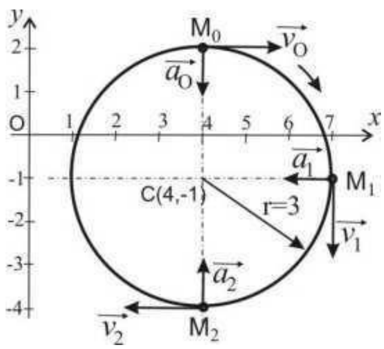
Da bi odredili jednačinu putanje tačke iz jednačine kretanja treba eliminisati vreme t:

$x=3sint+4$	$x-4=3sint$	$^2(x-4)^2=9sin^2t$
$y=3cost-1$	$y+1=3cost$	$(y+1)^2=9cos^2t$

Sabiranjem ovih dveju jednačina dobija se:

$(x-4)^2+(y+1)^2=9(sin^2t+cos^2t)$ odn. $\boxed{(x-4)^2+(y+1)^2=9}$ **Putanja je kružna**

$x-p=x-4$	$\Rightarrow$	$p=4$	$C(4;-1)$ centar kružnice
$y-q=y+1$	$\Rightarrow$	$-q=1\Rightarrow q=-1$	$r=\sqrt{9}=3$ poluprečnik kružnice



Početni položaj tačke na putanji:

za $t=0\rightarrow x_0=3sin0+4=3\cdot 0+4=4$
$y_0=3cos0-1=3\cdot 1-1=2$ | $M_0(4;2)$

Smer kretanja tačke: $t\nearrow\Rightarrow sint\nearrow\Rightarrow x\nearrow$ tačka se kreće od položaja M_0 u desno.

b) Određivanje brzine i ubrzanja u funkciji vremena

Da bi odredili izraze za brzinu i ubrzanje tačke potrebno je naći izvode jednačina kretanja po vremenu:

Izvodi: $x=3sint+4\rightarrow\dot{x}=3cost+0=3cost\rightarrow\ddot{x}=3(-sint)=-3sint$
$y=3cost-1\rightarrow\dot{y}=3(-sint)-0=-3sint\rightarrow\ddot{y}=-3cost$

Brzina tačke u funkciji vremena:

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=3^2cos^2t+(-3)^2sin^2t=9cos^2t+9sin^2t=9(cos^2t+sin^2t)$$
$$v^2=9\Rightarrow v=\sqrt{9}=3\frac{cm}{s}=const.$$

Tangencijalno ubrzanje:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3) = 0 = const.$$

Normalno ubrzanje:

$$a_N = \frac{v^2}{R_k} = \frac{v^2}{r} = \frac{9}{3} = 3\frac{cm}{s^2} = const.$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} \rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{a_N}$$

Pošto je tangencijalna komponenta ubrzanja jednaka nuli, postoji samo normalna komponenta ubrzanja, koja je usmerena ka centru putanje.

c) Položaj tačke, brzina i ubrzanje u određenom trenutku

za $t_0 = 0 \Longrightarrow položaj\ \boxed{M_0(4;2)}$

za $t_1 = \frac{\pi}{2}s = 1{,}57s \Longrightarrow x_1 = 3sin\frac{\pi}{2} + 4 = 3sin90° + 4 = 3\cdot 1 + 4 = 7$

$y_1 = 3cos90° - 1 = 3\cdot 0 - 1 = -1$ $\boxed{M_1(7;-1)}$

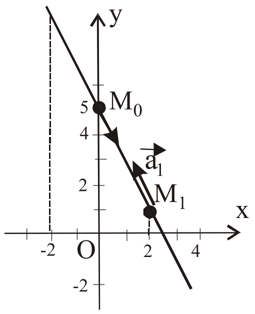
za $t_2 = \pi s = 3{,}14s \Longrightarrow x_2 = 3sin\pi + 4 = 3sin180° + 4 = 3\cdot 0 + 4 = 4$

$y_2 = 3cos180° - 1 = 3\cdot(-1) - 1 = -3 - 1 = -4$ $\boxed{M_2(4;-4)}$

Vektori $\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ imaju pravac tangente na putanju a smer kretanja; vektori $\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ su usmereni ka centru.

ZADATAK 1.13 (**putanja je prava linija**): Položaj tačke u ravni definisan je vektorom položaja $\vec{r} = (2\sin t)\vec{i} + (5 - 4\sin t)\vec{j}$ (koordinate su u *m*, vreme u *s*). a) Napisati jednačine kretanja tačke, naći putanju tačke i nacrtati je, odrediti početni položaj tačke i smer njenog kretanja. b) Naći brzinu, ubrzanje tačke i pređeni put u funkciji vremena.

c) Odrediti položaj tačke, brzinu i ubrzanje u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{2}\,s$.



Rešenje: a) Po definiciji vektor položaja je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, pa jednačine kretanja glase: $\boxed{x=2sint, \quad y=5-4sint}$. Kada iz prve jednačine izrazimo $\sin t = \frac{x}{2}$, pa zamenimo u drugu jednačinu dobijamo: $y = 5 - 4\frac{x}{2} = 5 - 2x$. Konačno je jednačina putanje: $\boxed{y = 5 - 2x}$, tj. putanja tačke je prava linija. Jednačinu prave crtamo određujući dve tačke na pravoj:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y(0) = 5 - 2\cdot 0 = 5 - 0 = 5 \rightarrow A(0;5) \\ x = 2{,}5 \rightarrow y(2{,}5) = 5 - 2\cdot 2{,}5 = 5 - 5 = 0 \rightarrow B(2{,}5;0) \end{cases}$$

Početni položaj: za $t=0 \rightarrow x_0=2sin0=2\cdot 0=0;\ y_0=5-4sin0=5-4\cdot 0=5-0=5; \rightarrow M_0(0;5)$.

Smer kretanja tačke: sa porastom vremena (*sint*) tj. $x=2sint$ raste → tačka se kreće od položaja M_0 udesno. Pošto je funkcija (*sint*) ograničena, koordinata *x* ima granične vrednosti: $x_{max}=2(sint)_{max}=2\cdot 1=2,\ x_{min}=2(sint)_{min}=2\cdot(-1)= -2$.

b) Nalazimo izvode jednačina kretanja po vremenu:

$x=2sint \rightarrow \quad \dot{x} = 2(\sin t)' = 2\cos t; \quad \ddot{x} = 2(\cos t)' = 2(-\sin t) = -2\sin t;$

$y=5-4sint \rightarrow \quad \dot{y} = (5)' - 4(\sin t)' = 0 - 4(\cos t) = -4\cos t; \quad \ddot{y} = -4(\cos t)' = -4(-\sin t) = 4\sin t.$

Brzina: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2^2\cos^2 t + 4^2\cos^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t + 16\cos^2 t} = \sqrt{20\cos^2 t} = \sqrt{20}\cos t = 4{,}47\cos t.$

Ubrzanje: $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{2^2\sin^2 t + 4^2\sin^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 16\sin^2 t} = \sqrt{20\sin^2 t} = 4{,}47\sin t.$

Pređeni put: $s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 4{,}47\cos t\,dt = 4{,}47\int_0^t \cos t\,dt = 4{,}47\sin t$.

c) Položaj tačke u trenutku $t_1=\frac{\pi}{2}\,s$: $x_1=2\sin\frac{\pi}{2}=2\cdot 1=2$; $y_1=5-4\sin\frac{\pi}{2}=5-4\cdot 1=5-4=1$; $\rightarrow M_1(2;1)$.

Brzina i ubrzanje u trenutku $t_1=\frac{\pi}{2}\,s$: $v_1=4{,}47\cos\frac{\pi}{2}=4{,}47\cdot 0=0\frac{m}{s}$; $a_1=4{,}47\sin\frac{\pi}{2}=4{,}47\cdot 1=4{,}47\frac{m}{s^2}$

Pređeni put do trenutka $t_1=\frac{\pi}{2}\,s$: $s_1=4{,}47\sin\frac{\pi}{2}=4{,}47\cdot 1=4{,}47m$.

ZADATAK 1.14 (**putanja je prava linija**): Dat je zakon kretanja tačke određen vektorom položaja $\vec{r}=(2t^2+4)\vec{i}+(2t^2+5)\vec{j}$. Odrediti putanju tačke a zatim položaj tačke, brzinu i ubrzanje u funkciji vremena i u trenutku $t_1=1\ s$.

Rešenje:a) Određivanje putanje tačke

Iz datog vektora položaja jednačine kretanja glase:

$x=2t^2+4\ldots(1)$, $y=2t^2+5\ldots(2)$

Jednačinu putanjetačke dobijamo kada iz prve jednačine izrazimo vreme t i uvrstimo u drugu jednačinu:

$x=2t^2+4\rightarrow 2t^2=x-4$

$y=2t^2+5=x-4+5$

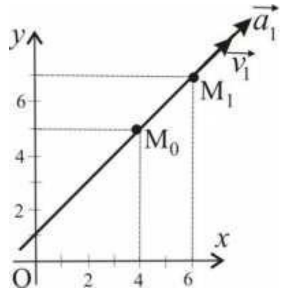
$\boxed{y=x+1}\rightarrow$ Putanja je prava linija

Početni položaj tačke: za $t=0$

$x_0=2\cdot 0^2+4=4$

$y_0=2\cdot 0^2+5=5\Longrightarrow\boxed{M_0(4;5)}$

x	0	4
y	1	5



b) Određivanje brzine i ubrzanja u funkciji vremena

Nalazimo izvode jednačina kretanja po vremenu:

Izvodi:

$$x=2t^2+4 \quad\Big|\quad y=2t^2+5$$
$$\dot{x}=4t \quad\Big|\quad \dot{y}=4t$$
$$\ddot{x}=4 \quad\Big|\quad \ddot{y}=4$$

Brzina u funkciji vremena:

$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{16t^2+16t^2}=\sqrt{32t^2}==\boxed{5{,}67t}$

Ubrzanje u funkciji vremena:

$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=\boxed{=5{,}67\,m/s^2=Const.}$

Položaj tačke, brzina i ubrzanje u trenutku $t_1=1\ s$:

$$x_1=2\cdot 1^2+4=6,\quad y_1=2\cdot 1^2+5=7\ \Longrightarrow\ \boxed{M_1(6;7)}$$
$$v_1=5{,}67t=5{,}67\cdot 1=\boxed{5{,}67\,m/s}$$
$$a_1=5{,}67\,m/s^2=Const.$$

ZADATAK 1.15 (**putanja je prava linija**): Položaj tačke definisan je jednačinama $x=2\cos t$; $y=3-2\cos t$. a) Naći putanju tačke i nacrtati je, odrediti početni položaj i smer njenog kretanja; b) Naći brzinu, ubrzanje i pređeni put tačke u funkciji vremena i u trenutku $t=\frac{\pi}{2}s$.

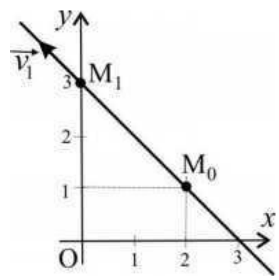
Rešenje:

a) Određivanje putanje tačke

Kada iz prve jednačine izrazimo vreme i zamenimo u drugu jednačinu, dobijamo jednačinu putanje tačke:

$x=2\cos t\Longrightarrow \cos t=\frac{x}{2}\ldots(1)$ $\Big|$ $y=3-2\cos t=3-2\cdot\frac{x}{2}\ldots(2)$

$\boxed{y=3-x}\rightarrow$ Jednačina putanje



Jednačinu prave crtamo određujući najmanje dve tačke na pravoj:

x	0	3
y	3	0

Početni položaj tačke: $x_0=2\cos 0=2$; $y_0=3-2\cos 0=1\Longrightarrow\boxed{M_0(2;1)}$

Smer kretanja tačke: sa porastom vremena ($\cos t$), tj. $x=2\cos t$ opada, tačka se kreće od položaja M_0 ulevo.

Funkcija ima granične vrednosti: $x_{max} = 2(cost)_{max} = 2 \cdot 1 = 2;$
$x_{min} = 2(cost)_{min} = 2 \cdot (-1) = -2.$

b) Određivanje brzine i ubrzanja u funkciji vremena

Nalazimo izvode jednačine kretanja po vremenu:

$x = 2cost$	$y = 3 - 2cost$	
Brzina: $\dot{x} = -2sint$	$\dot{y} = 2sint$	$v^2 = 4sin^2t + 4sin^2t = 8sin^2t$
Ubrzanje: $\ddot{x} = -2cost$	$\ddot{y} = 2cost$	$a^2 = 4cos^2t + 4cos^2t = 8cos^2t$

Pređeni put: $s = \int_0^t vdt = \int_0^t \sqrt{8}sintdt = \sqrt{8}\int_0^t sintdt = -\sqrt{8}cost$

Položaj tačke, brzina i ubrzanje u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{2}s$:

$$x_1 = 2cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 0 = 0 \qquad y_1 = 3 - 2cos\frac{\pi}{2} = 3 - 2 \cdot 0 = 3 \quad \Rightarrow \boxed{M_1(0;3)}$$

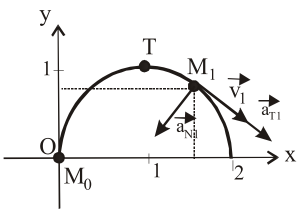
$$v_1 = \sqrt{8sin^2\frac{\pi}{2}} = \sqrt{8}\,m/s \qquad a_1 = \sqrt{8cos^2\frac{\pi}{2}} = 0\,m/s^2$$

ZADATAK 1.16 (**putanja je parabola**):Kuglica izbačena iz koordinatnog početka, kreće se u ravni shodno jednačinama: $x=2t$, $y=4t-4t^2$ (koordinate su u m, vreme u s). a) Naći putanju tačke i nacrtati je. b) Naći brzinu i ubrzanje tačke u funkciji vremena. c) Odrediti položaj tačke, brzinu i ubrzanje u trenutku $t_1=0,75s$.

Rešenje: a) Iz prve jednačine izrazimo $t = \frac{x}{2}$, pa zamenimo u drugu:

$y = 4\frac{x}{2} - 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2x - 4\frac{x^2}{4} = 2x - x^2$. Dobijena je jednačina putanje - parabole: $\boxed{y = 2x - x^2}$.

Parabolu najjednostavnije crtamo tako što prvo određujemo teme parabole a zatim još dve tačke čije su ordinate simetrične u odnosu na ordinatu temena x_T:



$$y' = 2 \cdot 1 - 2x = 2 - 2x \to\ 2 - 2x = 0 \to 2 = 2x \to$$

$$x_T = 1; \quad y_T = 2x_T - x_T^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 2 - 1 = 1; \quad T(1;1)$$

$$x_T = 1 \to \begin{cases} x_A = 1 + 1 = 2 \to y(2) = 2 \cdot 2 - 2^2 = 4 - 4 = 0 \to A(2;0) \\ x_B = 1 - 1 = 0 \to y(0) = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0 - 0 = 0 \to B(0;0) \end{cases}$$

Smer kretanja tačke: sa porastom vremena x raste → tačka se kreće od položaja M_0 udesno.

b) Nalazimo izvode jednačina kretanja po vremenu:

$x=2t \longrightarrow \quad \dot{x} = 2 \cdot 1 = 2; \quad \ddot{x} = (2)' = 0;$

$y=4t - 4t^2 \longrightarrow \quad \dot{y} = 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2t = 4 - 8t; \quad \ddot{y} = 0 - 8 \cdot 1 = -8.$

Brzina: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2^2 + (4-8t)^2} = \sqrt{4 + 16 - 64t + 64t^2} = \sqrt{20 - 64t + 64t^2}$.

Ubrzanje: $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0 + (-8)^2} = \sqrt{64} = 8\frac{m}{s} = const.$

Tangencijalno ubrzanje: $a_T = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{v} = \frac{2 \cdot 0 + (4-8t)\cdot(-8)}{v} = -\frac{8(4-8t)}{v}$,

Normalno ubrzanje: $a_N = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{v} = \frac{|2\cdot(-8) + (4-8t)\cdot 0|}{v} = \frac{|-16|}{v} = \frac{16}{v}$.

c) Položaj tačke u $t_1=0,75s$: $x_1=2\cdot0,75=1,5cm$; $y_1=4\cdot0,75-4\cdot(0,75)^2=3-2,25= 0,75 \to M_1(1,5;\ 0,75)$.

Brzina i ubrzanje u tren. t_1: $v_1=\sqrt{20-64\cdot 0{,}75+64\cdot 0{,}75^2}=\sqrt{20-48+36}=\sqrt{8}=2{,}82\frac{m}{s}$;

$a_1=8\frac{m}{s^2}$; $a_{T1}=-\frac{8(4-8\cdot 0{,}75)}{2{,}82}=-\frac{8\cdot(-2)}{2{,}82}=\frac{16}{2{,}82}=5{,}67\frac{m}{s^2}$; $a_{N1}=\frac{16}{2{,}82}=5{,}67\frac{m}{s^2}$.

Brzina i tangencijalno ubrzanje imaju pravac tangente na putanju u tački M_1 a normalno ubrzanje je usmereno ka centru krivine.

ZADATAK 1.17 (**putanja je parabola**):Date su jednačine kretanja tačke $x=t+2,\ y=4-t^2$ (x, y u m, t u s). Odrediti: a) putanju tačke; b) vrednosti brzine i komponenti ubrzanja u funkciji vremena $v(t)=?, a_T(t)=?, a_N(t)=?$; c) položaj tačke, brzinu i ubrzanje u određenom trenutku.

Rešenje:

a) Određivanje putanje tačke

Da bi odredili jednačinu putanje tačke iz jednačine kretanja treba eliminisati vreme t:

$x=t+2\rightarrow x-2=t\rightarrow t=x-2$

$y=4-t^2=4-(x-2)^2=4-(x^2-4x+4)=4-x^2+4x-4$

$\boxed{\boldsymbol{y=4x-x^2}}$

Putanja je parabola

Početni položaj tačke: za $t=0$

$x_0=0+2=2$; $y_0=4-0=4\Longrightarrow \boxed{M_0(2;4)}$

Smer kretanja tačke: $t\nearrow\Longrightarrow x\nearrow$ tačka se kreće od položaja M_0 u desno.

Dobijena jednačina putanje je parabola $\boxed{\boldsymbol{y=4x-x^2}}$. Parabolu najjednostavnije crtamo tako što prvo određujemo teme parabole, a zatim još dve tačke čije su ordinate simetrične u odnosu na ordinatu temena x_T:

$y'=4\cdot 1-2x=4-2x\Longrightarrow y'=0$

$4-2x=0\rightarrow 4=2x$

$x_T=\frac{4}{2}=2$

$y_T=4\cdot x_T-{x_T}^2$

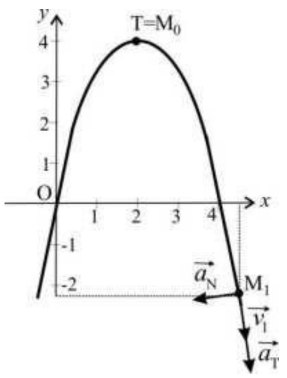
$y_T=4\cdot 2-2^2$

$y_T=8-4=4$

$x_T=2$ $\nearrow x'=2+2=4$, $\searrow x''=2-2=0$

$y_{(4)}=4\cdot 4-4^2=0$

$y_{(0)}=4\cdot 0-0^2=0$



b) Određivanje brzine i ubrzanja u funkciji vremena

Nalazimo izvode jednačina kretanja po vremenu:

Izvodi: $x=t+2\rightarrow \dot{x}=1+0=1\rightarrow \ddot{x}=0$

$y=4-t^2\rightarrow \dot{y}=0-2t=-2t\rightarrow \ddot{y}=-2\cdot 1=-2$

Brzina: $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=1^2+(-2t)^2=1+4t^2\rightarrow v=\sqrt{1+4t^2}$

Ubrzanje:

$a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=0+(-2)^2=4\rightarrow a=\sqrt{4}=2\,m/s^2=Const.$

Tangencijalno ubrzanje: $a_T=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{v}=\frac{(-2t)\cdot(-2)}{\sqrt{1+4t^2}}=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$

Normalno ubrzanje: $a_N=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{v}=\frac{|1\cdot(-2)|}{\sqrt{1+4t^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{1+4t^2}}==\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$

c) Položaj tačke, brzina i ubrzanje u određenom trenutku t_1=2,5 s

Položaj: za $t_1 = 2{,}5s \Longrightarrow$ $\left| \begin{array}{c} x_1 = 2{,}5 + 2 = 4{,}5 \\ y_1 = 4 - 2{,}5^2 = 4 - 6{,}25 = -2{,}25 \end{array} \right|$ $\boxed{M_1(4{,}5; -2{,}25)}$

Brzina: $v_1 = \sqrt{1 + 4 \cdot 2{,}5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} = \boxed{5{,}1\, m/s}$

Ubrzanje: $a_1 = \boxed{2\ m/s^2}$

$$a_{T_1} = \frac{4 \cdot 2{,}5}{\sqrt{1 + 4 \cdot 2{,}5^2}} = \frac{10}{5{,}1} = \boxed{1{,}96\, m/s^2}$$

Provera: $a = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2}$

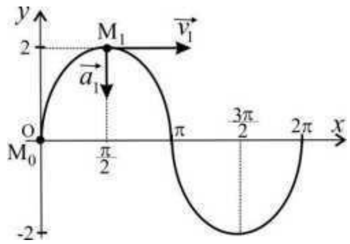
$$a_{N_1} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}} = \frac{2}{5{,}1} = \boxed{0{,}39\ m/s^2}$$

$$a_1 = \sqrt{1{,}96^2 + 0{,}39^2} = 2\ m/s^2$$

ZADATAK 1.18 (**putanja je sinusoida**): Kretanje materijalne tačke definisano je vektorom položaja $\vec{r} = 3t\vec{i} + (2sin3t)\vec{j}$ (koordinate su u metrima a vreme u sekundama). Odrediti brzinu i ubrzanje u funkciji vremena i za $t = \frac{\pi}{6}$.

Rešenje:

Po definiciji vektor položaja je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, pa jednačine kretanja glase: $x(t) = 3t \ldots (1)$; $y(t) = 2sin3t \ldots (2)$. Kada iz prve jednačine izrazimo $t = \frac{x}{3}$ pa zamenimo u drugu jednačinu, dobijamo $y = 2sin3 \cdot \frac{x}{3}$. Konačno je jednačina putanje $\boxed{\boldsymbol{y = 2sinx}}$ tj. putanja tačke je sinusoida.



Nalazimo izvode jednačina kretanja po vremenu:

$$\begin{array}{l|l} x(t) = 3t & y(t) = 2sin3t \\ v_x = \dot{x} = 3 & v_y = \dot{y} = 6cos3t \\ a_x = \ddot{x} = 0 & a_y = \ddot{y} = -18sin3t \end{array}$$

Brzina u funkciji vremena:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{3^2 + (6cos3t)^2} = \sqrt{9 + 36cos^2 3t}$$

Ubrzanje u funkciji vremena: $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + (-18sin3t)^2} = 18sin3t$

Brzina i ubrzanje u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{6}$:

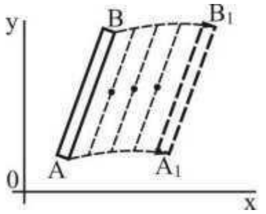
$$t_1 = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 3\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \\ y_1 = 2sin3\frac{\pi}{6} = 2sin\frac{\pi}{2} = 2 \end{array} \right| \boxed{M_1\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)}$$

Brzina u trenutku t_1: $v_1 = \sqrt{9 + 36cos^2 3\frac{\pi}{6}} = \sqrt{9 + 36 \cdot 0} = \boxed{3\, m/s} \rightarrow v_x = 3;\ v_y = 0$

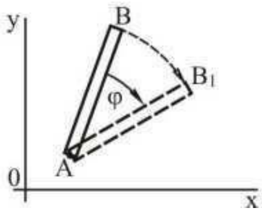
Ubrzanje u trenutku t_1: $a = a_y = -18sin3\frac{\pi}{6} = \boxed{-18\, m/s^2}$

2. KINEMATIKA KRUTOG TELA

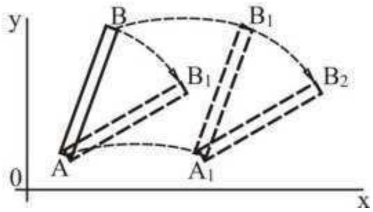
U kinematici, kao i u statici, proučavaćemo kruta tela tj. smatraćemo da rastojanje između bilo koje dve tačke tela ostaje za vreme kretanja nepromenljivo. Razlikujemo dva osnovna oblika kretanja krutog tela: translatorno kretanje (translaciju) i obrtanje tela oko ose (rotaciju). Slaganjem translatornog i obrtnog kretanja nastaje ravno kretanje.



translacija

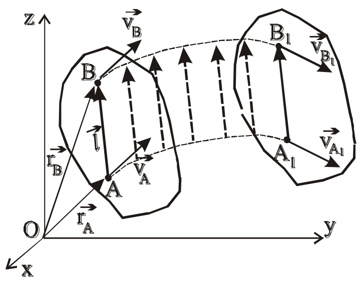


rotacija



ravno kretanje

2.1. TRANSLATORNO KRETANJE



To je kretanje krutog tela pri kome su putanje svih tačaka tela u toku kretanja paralelne i jednake, a svaka duž na telu ostaje paralelna svom početnom položaju.

Diferenciranjem izraza $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{l}$ se dobija $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{l}}{dt}$.

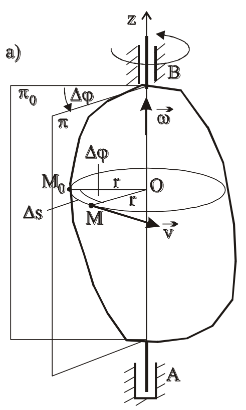
Vektor $\vec{AB} = \vec{l}$ se ne menja po pravcu i intenzitetu pa je $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{l}}{\mathrm{dt}} = 0$.

Izvodi $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ po vremenu predstavljaju vektore brzina $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.

$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A,\ \vec{v}_{B_1} = \vec{v}_{A_1},}$ itd. Diferenciranjem $\dfrac{d\vec{v}_A}{dt} = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt}$ sledi: $\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A}$. Brzine i ubrzanja tačaka A i B su jednaka međusobno po intenzitetu, pravcu i smeru u bilo kom trenutku. Translatorno kretanje krutog tela je određeno kretanjem bilo koje njegove tačke pa se zato pri određivanju brzina i ubrzanja koriste iste formule kao u kinematici tačke.

2.2. OBRTANJE KRUTOG TELA OKO NEPOMIČNE OSE (ROTACIJA)

2.2.1. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje tela



Kretanje krutog tela pri kome dve tačke, koje pripadaju telu, ostaju nepokretne u toku čitavog kretanja, naziva se obrtanje (rotacija). Prava koja prolazi kroz pomenute dve tačke naziva se osa rotacije. Sve tačke tela koje nisu na osi rotacije kreću se po kružnim putanjama.

Zakon obrtanja tela oko ose je zavisnost ugla od vremena $\boxed{\varphi = \varphi(t).}$

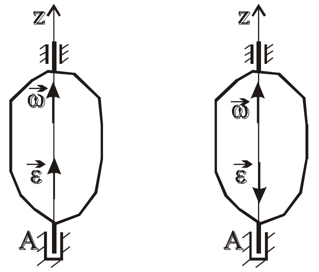
Ugao rotacije (u *rad*) računa se i preko broja obrtaja *N*: $\boxed{\varphi = 2\pi N}$.

Za vreme Δt se telo zaokrene za ugao $\Delta\varphi$, pa je srednja ugaona brzina jednaka: $\omega_{sr} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Trenutnu ugaonu brzinu dobijamo ako $\Delta t \to 0$: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. tj.

$\boxed{\omega = \dot{\varphi}.}$ Jedinica za ugaonu brzinu je *rad/s=1/s =s*$^{-1}$.

Ako za vreme Δt ugaona brzina promeni vrednost za $\Delta\omega$, njenu promenu definiše srednje ugaono ubrzanje tela: $\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Trenutno ugaono ubrzanje biće jednako: $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$. tj. $\boxed{\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.}$ Jedinica za ugaono ubrzanje je $rad/s^2=1/s^2=s^{-2}$.



Ako je obrtanje oko ose Az, vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ imaju pravac ose Az: $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$, $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}$, a njihov smer se određuje pravilom desne ruke. To su klizni vektori, tj. vektori vezani za liniju.

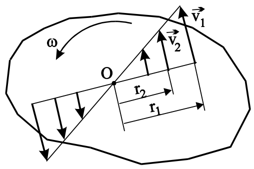
Ako intenzitet ugaone brzine raste sa vremenom, obrtanje je ubrzano a vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ su istog smera (sl. levo); kada intenzitet opada obrtanje je usporeno, $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ su suprotnog smera (sl. desno).

Kada je ugaona brzina konstantna telo rotira *jednoliko (ravnomerno)* $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const.$, $d\varphi = \omega dt$, pa je: $\boxed{\varphi = \omega t.}$

Ako je dat broj obrtaja u minuti n, ugaona brzina [u rad/s], računa se po obrascu $\boxed{\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.}$

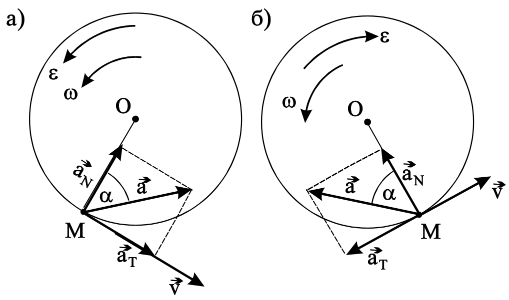
Ako je $\varepsilon = const.$, obrtanje je *jednako promenljivo(ubrzano-usporeno)*: $\boxed{\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t; \ \ \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.}$

2.2.2. Brzine i ubrzanja tačaka rotirajućeg tela



Bilo koja tačka M tela, na rastojanju r od ose obrtanja, opisuje kružnu putanju poluprečnika r, sa centrom na osi. Za vreme Δt telo se okrene za ugao $\Delta\varphi$, a tačka se pomeri za $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$. Dalje sledi: $\frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$, $\left(\left|\frac{ds}{dt}\right| = v, \frac{d\varphi}{dt} = \omega\right)$ pa dolazimo do izraza za linijsku ili obimnu brzinu tačke tela: $\boxed{v = r\omega.}$ Vektor brzine $\vec{v}$ bilo koje tačke ima pravac tangente na njenu putanju, intenzitet je jednak proizvodu ugaone brzine i rastojanja do ose obrtanja: $v_1 = r_1\,\omega$, $v_2 = r_2\,\omega$...

Projektovanjem $\vec{a}$ na tangentu i normalu dobijamo $a_T = \frac{dv}{dt}$, $a_N = \frac{v^2}{R_K}$. Zamenom izraza za brzinu dobijaju se intenziteti za tangencijalno $\boxed{a_T = r\dot{\omega} = r\varepsilon,}$ i normalno ubrzanje $\boxed{a_N = r\omega^2}$. Normalno ubrzanje ima pravac poluprečnika kružne putanje, usmereno je ka centru putanje a tangencijalno ubrzanje ima pravac tangente na putanju.

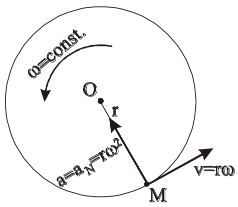


Ako se telo obrće ubrzano, tj. vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ imaju isti smer, vektori tangencijalnog ubrzanja $\vec{a}_T$ i brzine $\vec{v}$ su istog smera (na slici pod a). U slučaju kada je obrtanje usporeno, vektori $\vec{a}_T$ i $\vec{v}$ su suprotnog smera (na slici pod b). Ova kretanja tela su primeri neravnomernih rotacija.

Pravac vektora $\vec{a}$, određuje ugao α koji vektor $\vec{a}$ zaklapa sa poluprečnikom: $\boxed{tg\alpha = \frac{|\vec{a}_T|}{|\vec{a}_N|} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.}$

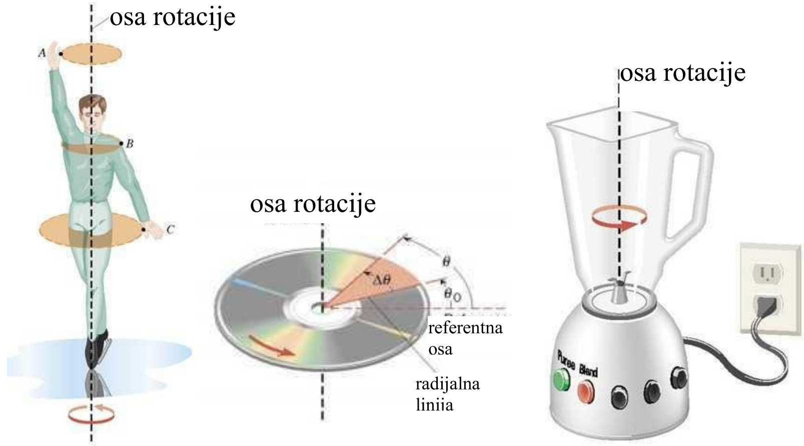
Intenzitet ukupnog ubrzanja: $\boxed{a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2},}$ tj. $a = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$.

U datom trenutku ugaona brzina i ugaono ubrzanje imaju istu vrednost za sve tačke tela, ubrzanja svih tačaka tela u datom trenutku su proporcionalna njihovim rastojanjima od ose obrtanja a ugao α ima jednu istu vrednost; vektori ubrzanja svih tačaka na jednom prečniku su paralelni međusobno.

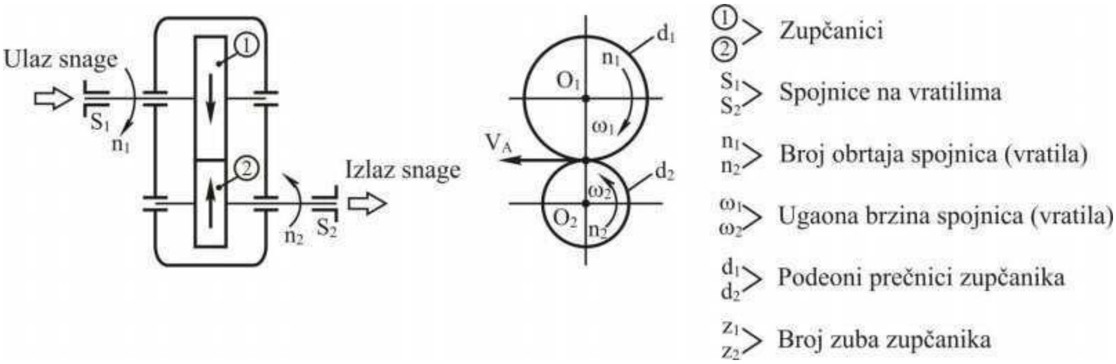


Kada se telo <u>obrće ravnomerno</u>, ugaona brzina je konstantna pa je $\dot{\omega}=\varepsilon=0$. Sledi: $a=r\sqrt{0^2+\omega^4}=r\omega^2=a_N$; $tg\alpha=\dfrac{0}{\omega^2}=0\Rightarrow\alpha=0.$

<u>*PRIMERI TELA KOJI VRŠE OBRTANJE OKO NEPOMIČNE OSE*</u>



<u>*KRETANJE ZUPČASTIH, LANČANIH I KAIŠNIH PRENOSNIKA SNAGE*</u>

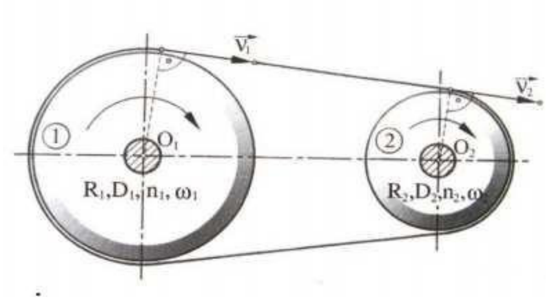


Veza: (n) broj obrtaja u minuti – ugaona brzina (ω) u rad/s : $\boxed{\omega=\dfrac{\pi n}{30},\quad n=\dfrac{30\omega}{\pi}}$

Obimna brzina: $v_A=\dfrac{d_1}{2}\omega_1=\dfrac{d_2}{2}\omega_2$, modul zupčanika: $m=\dfrac{d_1}{z_1}=\dfrac{d_2}{z_2}\Rightarrow\boxed{\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{z_1}{z_2}}$

<u>Prenosni odnos prenosnika</u> $\boxed{i=\dfrac{z_2\ (gonjenog\ zupcanika)}{z_1\ (pogonskog\ zupcanika)}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{d_2}{d_1}}$

Kaišnici



Obimne brzine kaišnika su:

$$v_1 = R_1\omega_1 = R_1\pi n_1 / 30,$$

$$v_2 = R_2\omega_2 = R_2\pi n_2 / 30$$

Pri ovom prenosu važi $v_1 = v_2$ da ne bi došlo do klizanja kaiša po kaišniku, pa se dobija prenosni odnos:

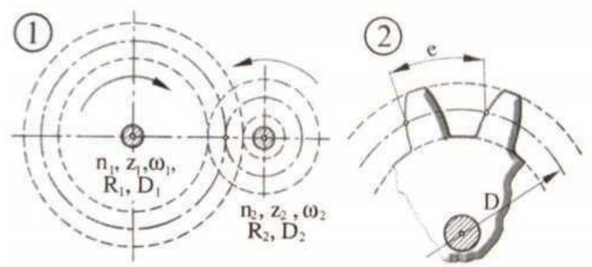
$$i = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = R_2 / R_1 = D_2 / D_1 .$$

Prenosnici kod kojih je $D_1 > D_2 \rightarrow i < 1$ (vođeno vratilo se obrće brže od vodećeg) su <u>multiplikatori</u>. Prenosnici kod kojih je $D_1 < D_2 \rightarrow i > 1$ su <u>reduktori</u> (vođeno vratilo se obrće sporije od vodećeg).

<u>Npr.</u> Elektromotor se okreće sa *n_1=1500ob/min*. Prečnik njegovog kaišnika je *80mm*. Koliki je prečnik kaišnika na bušilici ako se burgija okreće sa brojem obrtaja *n_2=750ob/min*?

<u>*Rešenje:*</u> $i = n_1 / n_2 = 1500/750 = 2$ (reduktor) $i = D_2 / D_1 \rightarrow D_2 = D_1 \cdot i = 80 \cdot 2 = 160mm$

Zupčanici



Prenosni odnos se formira na isti način kao i kod kaišnika, s tim što se ovde još uzima i broj zuba zupčanika pa važi i odnos: $i = z_2 / z_1$.

<u>Npr.</u> Vođeni zupčanik ima 40 zubaca i čini *10ob/min*. Prenosni odnos je 2. Odrediti broj zubaca i broj obrtaja u minuti vodećeg zupčanika.

<u>*Rešenje:*</u> $i = z_2 / z_1 \rightarrow z_1 = z_2 / i = 40/2 = 20$, $i = n_1 / n_2 \rightarrow n_1 = i \cdot n_2 = 2 \cdot 10 = 20ob/min$.

2.3. <u>ZADACI IZ OBRTNOG KRETANJA TELA</u>

<u>ZADATAK 2.1. (**usporeno obrtanje**)</u>: Osovina se obrtala sa *n=90ob/min* a posle isključivanja motora, nastavlja da se obrće jednako usporeno i zaustavlja se nakon *40s*. Odrediti koliko obrtaja je osovina napravila za to vreme i odrediti njeno ugaono usporenje.

<u>*Rešenje*</u>: Za ravnomerno usporeno obrtanje važe obrasci: $\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ $\quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t$

gde je početna ugaona brzina $\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi \frac{rad}{s} = 9{,}42 \frac{rad}{s} = 9{,}42 s^{-1}$.

U trenutku zaustavljanja (*t_1=40s*) je ugaona brzina *ω_1=0*. Iz izraza za ugaonu brzinu sledi:

$0 = 9{,}42 - \varepsilon \cdot 40, \Rightarrow \varepsilon = \frac{3\pi}{40} = \frac{9{,}42}{40} = 0{,}2355 \frac{rad}{s^2} = 0{,}2355 s^{-2}$. Ukupni ugao obrtanja *$\varphi_1$=2πN.*

Zamenjivanjem dobijamo: $2\pi N = 3\pi \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{40} \cdot 40^2 \Rightarrow 2\pi N = 60\pi \Rightarrow N = 30$ *obrt.*

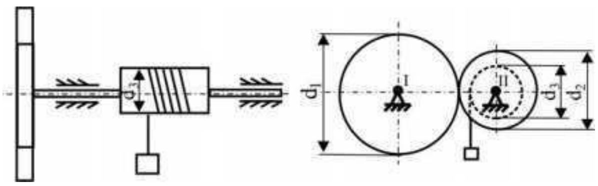
<u>ZADATAK 2.2. (**ubrzano obrtanje**)</u>: Zamajac poluprečnika *r*=0,5m, počinje kretanje iz stanja mirovanja, konstantnim ugaonim ubrzanjem *ε.* Ako za *20s* zamajac napravi 200 obrtaja, odrediti ugaonu brzinu, broj obrtaja *n* i ubrzanje tačke na obodu u trenutku *t_1=20s.*

Rešenje: Kretanje počinje iz stanja mirovanja pa je $\omega_0=0$ a ugaona brzina $\omega=\varepsilon t$. Ukupni ugao obrtanja je $\varphi=2\pi N=2\pi\cdot 200=400\pi$ ili po obrascu $\varphi=\omega_0 t+\frac{1}{2}\varepsilon t^2=\frac{1}{2}\varepsilon t^2$, odakle za $t_1=20s$ sledi: $400\pi=\frac{1}{2}\varepsilon\cdot 20^2,\Rightarrow \varepsilon=2\pi\frac{rad}{s^2}$. Vrednost ugaone brzine iznosi $\omega_1=\varepsilon t_1=2\pi\cdot 20=40\pi\ rad/s$, a broj obrtaja: $n_1=\frac{30\omega}{\pi}=\frac{30\cdot 40\pi}{\pi}=1200\frac{o}{min}$. Dalje se određuju komponente ubrzanja i ukupno ubrzanje:

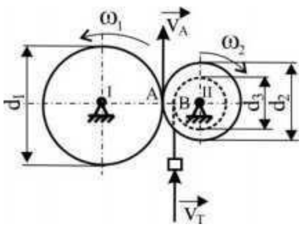
$$a_N=r\omega_1^2=0{,}5\cdot(40\pi)^2=7887{,}7\frac{m}{s^2};\quad a_T=r\varepsilon=0{,}5\cdot 2\pi=3{,}14\frac{m}{s^2};$$

$$a_1=\sqrt{a_T^2+a_N^2}=\sqrt{3{,}14^2+7887{,}7^2}\cong 7887{,}7\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 2.3. (**sistem za podizanje tereta**): Prikazan sistem služi za podizanje tereta. Smer obrtanja pogonskog vratila I suprotan je smeru kazaljki na satu sa brojem obrtaja $n_1 = 120\ ob/min$. Odrediti brzinu podizanja tereta i ubrzanje tačke na obodu doboša. Prečnici zupčanika jednaki su: $d_1 = 40\ cm$ i $d_2 = 20\ cm$, prečnik doboša $d_3 = 10\ cm$.



Rešenje:



Ugaona brzina pogonskog vratila I, kao i zupčanika 1, biće jednaka:

$$\omega_1=\frac{\pi n_1}{30}=\frac{\pi\cdot 120}{30}=4\pi=\boxed{12{,}56\frac{rad}{s}}$$

Smatra se da između dodirnih tačaka spregnutih zupčanika nema klizanja, pa su brzine dodirnih tačaka jednake:

$$v_A=r_1\omega_1=\frac{d_1}{2}\omega_1=0{,}2\cdot 4\pi=0{,}8\pi=\boxed{2{,}51\,m/s}$$

$$v_A=r_2\omega_2\Rightarrow\omega_2=\frac{v_A}{r_2}=\frac{v_A}{\frac{d_2}{2}}=\frac{2{,}51}{0{,}1}=25{,}1\frac{rad}{s}\ ili\ \omega_2=\frac{0{,}8\pi}{0{,}1}=\boxed{8\pi\frac{rad}{s}}$$

Ugaona brzina zupčanika 2 je ujedno i ugaona brzina vratila II. Brzina tačke B jednaka je brzini podizanja tereta:

$$v_B=v_T=r_3\omega_2=\frac{d_3}{2}\omega_2=0{,}05\cdot 25{,}1=\boxed{1{,}25\,m/s}$$

Poznavajući ugaonu brzinu zupčanika 2 može se odrediti broj obrtaja zupčanika 2:

$$\omega_2=\frac{\pi n_2}{30}\rightarrow n_2=\frac{30\cdot\omega_2}{\pi}=\frac{30\cdot 8\pi}{\pi}=240\frac{ob}{min}$$

Ubrzanje za tačku B na obodu diska:

Kako je $\omega_1=Const.\Rightarrow\omega_2=Const.\rightarrow$ stoga je ugaono ubrzanje $\varepsilon_2=0$

Komponente ubrzanja, tangencijalna i normalna komponenta ubrzanja tačke B:

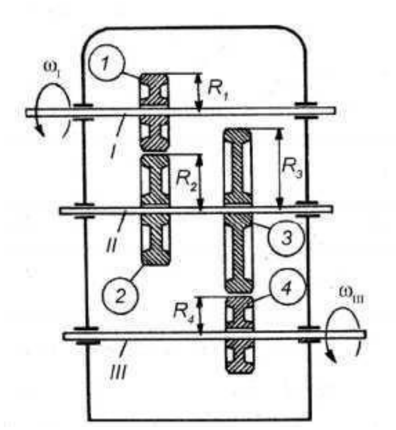
Tangencijalna komponenta ubrzanja: $a_{B_T}=\frac{d_3}{2}\varepsilon_2=0$

Normalna komponenta ubrzanja: $a_{B_N}=\frac{d_3}{2}\omega_2{}^2=0{,}05\cdot 25{,}1^2=31{,}6\frac{m}{s^2}$

Ukupno ubrzanje: $\boxed{a_B=a_{B_N}=31{,}6\frac{m}{s^2}}$

Vektori brzina se ucrtavaju u pravcu tangente na kružnu putanju tačke, u smeru obrtanja. Pošto su u ovom primeru obrtanja zupčanika ravnomerna ($\varepsilon=0$), ubrzanje tačke sadrži samo normalnu komponentu koja je usmerena ka osi rotacije.

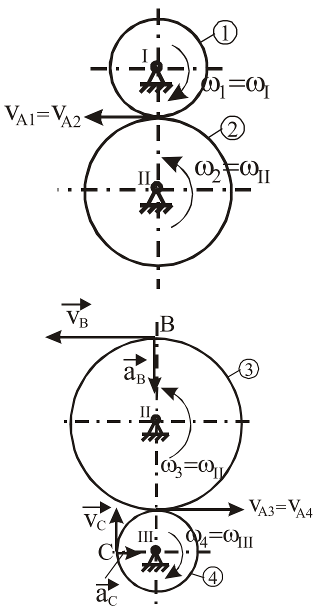
ZADATAK 2.4. (**reduktor**): Broj obrtaja ulaznog vratila I prikazanog zupčastog reduktora iznosi n_I=*600 o/min*. Zupčanik 1 je čvrsto vezan za vratilo I, zupčanici 2 i 3 za vratilo II, zupčanik 4 za izlazno vratilo III. Naći ugaone brzine vratila I, II, i III kao i broj obrtaja izlaznog vratila III. Definisati prenosne odnose spregnutih zupčanika kao i ukupan prenosni odnos reduktora. Odrediti brzine i ubrzanja tačaka na obodima zupčanika 3 i 4. Dati su poluprečnici zupčanika: R_1=*20cm,* R_2=*30cm,* R_3=*40cm,* R_4=*20cm.*



Rešenje: Ugaona brzina ulaznog vratila, kao i zupčanika 1, biće jednaka: $\omega_I = \omega_1 = \dfrac{\pi n_I}{30} = \dfrac{\pi \cdot 600}{30} = 20\pi = 62{,}8\dfrac{rad}{s}$.

Smatra se da između dodirnih tačaka spregnutih zupčanika nema klizanja, pa su brzine dodirnih tačaka jednake: $v_{A1} = R_1\omega_1,\ v_{A2} = R_2\omega_2 \rightarrow v_{A1} = v_{A2} \rightarrow R_1\omega_1 = R_2\omega_2$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1\omega_1}{R_2} = \frac{20\cdot 20\pi}{30} = \frac{40\pi}{3} = 41{,}9\frac{rad}{s}.$$



Ugaona brzina zupčanika 2 je ujedno i ugaona brzina vratila II kao i zupčanika 3: $\omega_2 = \omega_{II} = \omega_3 = 41{,}9\dfrac{rad}{s}$.

Zbog jednakosti brzina dodirnih tačaka zupčanika sledi:

$$v_{A3} = v_{A4} \rightarrow R_3\omega_3 = R_4\omega_4 \rightarrow \omega_4 = \frac{R_3\omega_3}{R_4} = \frac{40\cdot 40\pi/3}{20} = \frac{80\pi}{3} = 83{,}8\frac{rad}{s}.$$

Ugaona brzina zupčanika 4 je ujedno i ugaona brzina vratila III: $\omega_4 = \omega_{III} = 83{,}8\dfrac{rad}{s}$. Iz izraza za ugaonu brzinu $\omega_{III} = \dfrac{\pi n_{III}}{30}$ može se odrediti broj obrtaja vratila III: $n_{III} = \dfrac{30\omega_{III}}{\pi} = \dfrac{30\cdot 80\pi/3}{\pi} = 800\dfrac{o}{min}$.

Zadatak se može rešiti i <u>na drugi način, preko prenosnih odnosa</u>. Prenosni odnosi spregnutih zupčanika jednaki su:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2},\quad i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}\ .$$

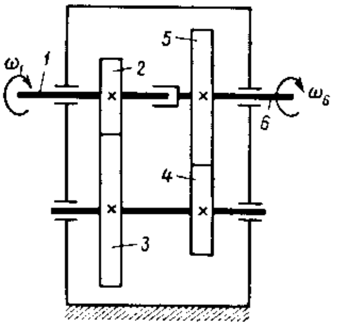
Ukupan prenosni odnos reduktora definiše se kao količnik ulazne i izlazne ugaone brzine: $i = \dfrac{\omega_I}{\omega_{III}} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\dfrac{\omega_3}{\omega_4} = \dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{R_4}{R_3} = i_{12}\ i_{34} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Na ovaj način se dobija: $\omega_{III} = \dfrac{\omega_I}{i} = \omega_1\dfrac{R_1}{R_2}\dfrac{R_3}{R_4} = 20\pi\dfrac{20}{30}\cdot\dfrac{40}{20} = \dfrac{80\pi}{3} = 83{,}8\dfrac{rad}{s}$.

Brzina bilo koje tačke (npr. tačke B) na obodu zupčanika 3 biće jednaka: $v_B = R_3\omega_3 = 40\cdot 41{,}9 = 1676 cm/s$. Za tačku C na obodu zupčanika 4 brzina će imati isti intenzitet kao i brzina tačke na obodu zupčanika 3, jer se radi o paru spregnutih zupčanika: $v_C = R_4\omega_4 = 20\cdot 83{,}8 = 1676 cm/s$. Vektori brzina se ucrtavaju u pravcu tangente na kružnu putanju tačke, u smeru obrtanja. Pošto su obrtanja zupčanika ravnomerna (tj. $\varepsilon = 0$), ubrzanja tačaka sadrže samo normalne komponente, pa su zato usmerena ka osi rotacije. Intenziteti ubrzanja tačaka B i C:

$$a_B = a_{BN} = R_3\omega_3^2 = 40\cdot 41{,}9^2 = 70224{,}4 cm/s^2 = 702{,}2 m/s^2;\quad a_C = a_{CN} = R_4\omega_4^2 = 1404{,}5 m/s^2.$$

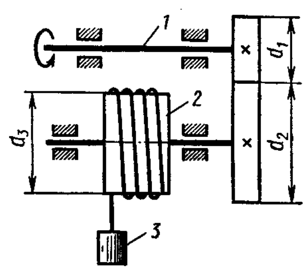
ZADATAK 2.5. (**reduktor**): Broj obrtaja ulaznog vratila 1 prikazanog zupčastog reduktora iznosi $n_1=300\ o/min$. Zupčanik 2 je čvrsto vezan za vratilo 1, zupčanici 3 i 4 za donje vratilo, zupčanik 5 za izlazno vratilo 6. Naći ugaone brzine vratila kao i broj obrtaja izlaznog vratila 6. Definisati prenosne odnose spregnutih zupčanika kao i ukupan prenosni odnos reduktora. Odrediti brzine i ubrzanja tačaka na obodima zupčanika 4 i 5. Dati su poluprečnici: $R_2=15cm$, $R_3=40cm$, $R_4=20cm$, $R_5=30cm$.



Rešenje: Ugaone brzine ulaznog vratila $\omega_1 = 10\pi = 31{,}4 \dfrac{rad}{s}$, donjeg vratila $\omega_d = 15\pi/4\ \dfrac{rad}{s} = \omega_3 = \omega_4$, izlaznog vratila $\omega_6 = \omega_5 = 5\pi/2\ \dfrac{rad}{s}$, a broj obrtaja $n_6 = 75\ \ o/\min$. Prenosni odnos $i=4$.

Brzine tačaka na obodima $v = 75\pi \dfrac{cm}{s}$ a ubrzanja $a_4 = 2775{,}8 \dfrac{cm}{s^2}$, $a_5 = 1850 \dfrac{cm}{s^2}$.

ZADATAK 2.6. (**sistem za podizanje tereta**): Prikazanim sistemom se, promenljivom brzinom, podiže teret 3. Ugao obrtanja pogonskog vratila 1 menja se po zakonu $\varphi = 2{,}5t^2$. Odrediti brzinu podizanja tereta 3 u trenutku $t_1=1s$ i ubrzanje tačke na obodu doboša 2. Prečnici zupčanika jednaki su: $d_1=10cm$ i $d_2=50cm$, a prečnik doboša 2 je $d_3=40cm$.

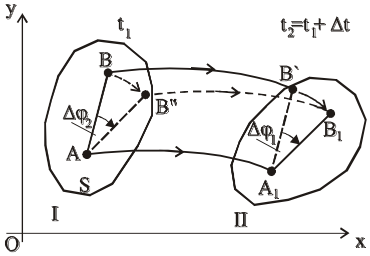


Rešenje: Za vratilo 1: $\omega_1 = 5t,\ \varepsilon_1 = 5 \dfrac{rad}{s^2} = const.$; u trenutku t_1:

$\omega_1 = 5 \dfrac{rad}{s}$, $\varepsilon_1 = 5 \dfrac{rad}{s^2}$. Za vratilo 2: $\omega_2 = t,\ \varepsilon_2 = 1 \dfrac{rad}{s^2} = const.$; za t_1: $\omega_2 = 1 \dfrac{rad}{s}$, $\varepsilon_2 = 1 \dfrac{rad}{s^2}$.

Za tačku B na obodu doboša: $v_B = 20 \dfrac{cm}{s}$; $a_{BN} = 20 \dfrac{cm}{s^2}$, $a_{BT} = 20 \dfrac{cm}{s^2}$, $a_B = 28{,}3 \dfrac{cm}{s^2}$.

2.4. RAVNO KRETANJE KRUTOG TELA

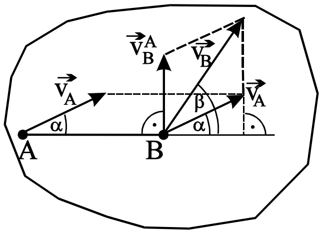


Ravno kretanje krutog tela je takvo kretanje pri kome se sve tačke tela kreću u ravnima koje su paralelne datoj nepomičnoj ravni; proučavanje se svodi na proučavanje ravne figure, (preseka tela sa ravni paralelnoj datoj nepomičnoj ravni), koja se kreće u svojoj ravni.

Jednačine ravnog kretanja: $\boxed{x_A=x_A(t),\ y_A=y_A(t),\quad \varphi=\varphi(t)}$.

Ravno kretanje krutog tela nastaje slaganjem translatornog kretanja i rotacije. Jednačine $x_A=x_A(t),\ y_A=y_A(t)$ opisuju translatorno kretanje a jednačina $\varphi=\varphi(t)$ obrtno kretanje oko pola A. Osnovne kinematske karakteristike ravnog kretanja su brzina i ubrzanje translatornog kretanja i ugaona brzina i ugaono ubrzanje obrtnog kretanja oko pola.

2.4.1. Određivanje brzina tačaka tela

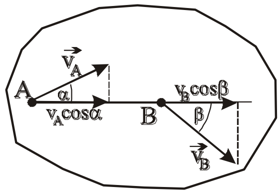


I) Vektorski način

Pošto ravno kretanje nastaje slaganjem translatornog kretanja i rotacije, brzina bilo koje tačke na telu koje vrši ravno kretanje sastoji se iz dve komponente: brzine translacije i brzine rotacije oko pola.

Tako će vektor brzine tačke B biti jednak: $\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A}$

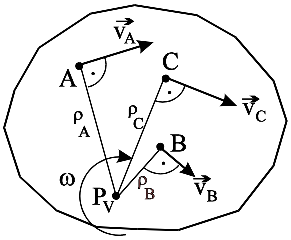
Vektor $\vec{v}_B^A$ (brzina tačke B pri obrtanju oko pola A), ima intenzitet $\boxed{v_B^A = \omega \cdot AB}$ (ω ugaona brzina rotacije tela), pravac je normalan na pravac AB i ima smer ugaone brzine. Pravac i smer rezultujuće brzine $\vec{v}_B$ dobijaju se formiranjem odgovarajućeg paralelograma.



II) Teorema o projekcijama brzina

Projekcije brzina dveju tačaka krutog tela na pravu, koja spaja te tačke, jednake su međusobom. $\boxed{v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.}$

Koristi se za nalaženje intenziteta brzine neke tačke tela ako je poznat njen pravac, kao i pravac i intenzitet brzine neke druge tačke tela.

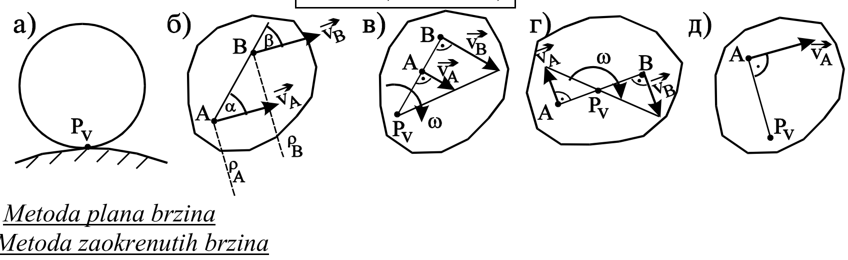


III) Metoda trenutnog pola brzina

Trenutni pol brzina P_v je tačka čija je brzina u datom trenutku jednaka nuli. Nalazi se u preseku normala na vektore brzina; njen položaj se u toku vremena menja; ne mora biti na samom telu, može biti i van njega. Za poznat položaj P_v brzina tačke biće jednaka $\boxed{v_A = AP_v \cdot \omega}$; upravna je na pravac AP_v i ima smer ugaone brzine.

Za druge tačke se može pisati: $v_B = BP_v \cdot \omega;\ v_C = CP_v \cdot \omega$

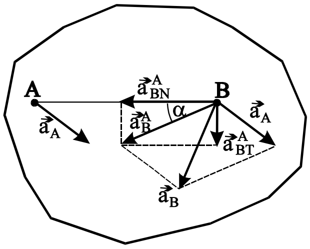
Ugaona brzina se može izračunati: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP_v};\omega = \dfrac{v_B}{BP_v}}$



IV) Metoda plana brzina

V) Metoda zaokrenutih brzina

2.4.2. Određivanje ubrzanja tačaka tela



I) Vektorski način

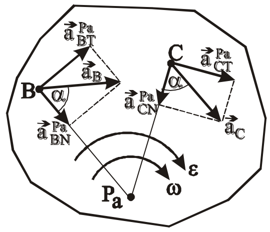
Slično kao kod određivanja brzina, vektor ubrzanja tačke B biće jednak: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^A$ ili ako se vektor $\vec{a}_B^A$ (koji nastaje usled obrtanja tačke B oko tačke A) izrazi preko svoje tangencijalne i normalne komponente: $\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A.}$

Intenziteti ovih komponenti jednaki su: $\boxed{a_{BN}^A = AB \cdot \omega^2,\ a_{BT}^A = AB \cdot \varepsilon.}$

Vektor $\vec{a}_{BN}^A$ uvek je usmeren od tačke B ka tački A; vektor $\vec{a}_{BT}^A$ je normalan na pravac AB, usmeren u smeru obrtanja pri ubrzanom a u suprotnom smeru pri usporenom kretanju. Ovu vektorsku jednačinu projektujemo na ose proizvoljno izabranog koordinatnog sistema, dobijamo dve skalarne jednačine iz kojih možemo naći dve nepoznate.

II) Metoda trenutnog pola ubrzanja

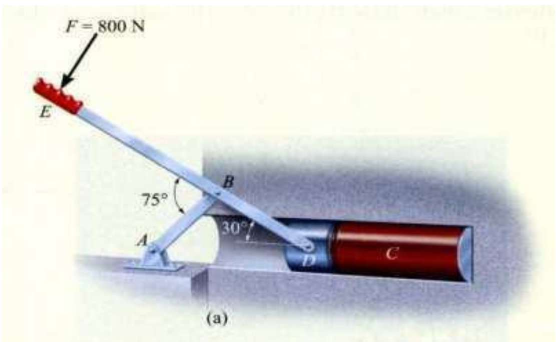
Trenutni pol ubrzanja P_a je tačka čije je ubrzanje u datom trenutku jednako nuli. Od vektora ubrzanja, pod uglom α koji je određen izrazom $\boxed{tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}}$, na rastojanju $\boxed{AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}}$ nalazi se P_a.

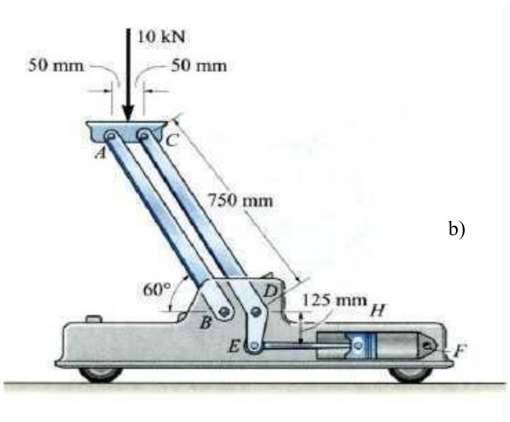


Ubrzanje bilo koje tačke je proporcionalno udaljenju te tačke od trenutnog pola ubrzanja: $a_B = a_B^{Pa} = BP_a\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, $a_C = a_C^{Pa} = CP_a\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

Trenutni pol brzina i trenutni pol ubrzanja nisu iste tačke, i ne poklapaju se (sem kod rotacije). Npr, pri kotrljanju točka bez klizanja, pri čemu je brzina centra C točka $v_C = const. \rightarrow a_C = 0$. Dakle, trenutni pol brzina nalazi se u tački dodira, tačka C je trenutni pol ubrzanja.

PRIMERI KRETANJA TELA



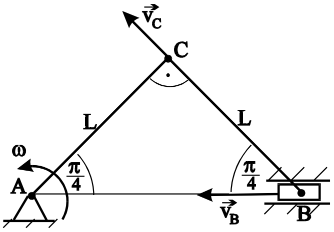


b)

a) Klip D vrši translatorno kretanje, poluga AB vrši rotaciju oko ose A, poluga DBE ravno kretanje.
b) Klip u cilindru vrši translatorno kretanje, poluga EDC vrši rotaciju oko ose D, poluga AB se obrće oko ose B, dok klipnjača EH vrši ravno kretanje.

2.5. ZADACI IZ RAVNOG KRETANJA TELA

ZADATAK 2.7. (**mehanizam**): Odrediti brzinu klizača B mehanizma prikazanog na slici, ako je $AC=CB=L=0{,}2m$, ugaona brzina krivaje AC je $\omega=5\ rad/s$ a u datom trenutku ugao između AC i CB iznosi $\pi/2=90^0$.

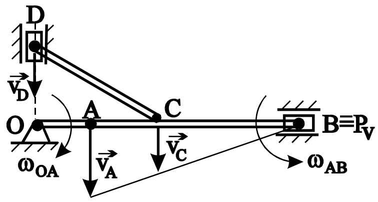


Rešenje: Oštri uglovi jednakokrakog trougla ABC iznose po 45^0. Brzina tačke C ima pravac normale na krivaju AC, odn. pravac štapa CB i intenzitet $v_C=\omega L=5\cdot 0{,}2=1m/s$. Brzina tačke B mora biti horizontalna. Po teoremi o projekcijama brzina biće:

$$(\vec{v}_C)_{CB}=(\vec{v}_B)_{CB};\quad v_C\cos 0=v_B\cos 45^0;$$

$$v_C=v_B\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow v_B=\frac{v_C}{0{,}707}=\frac{1}{0{,}707}=1{,}414\ m/s.$$

ZADATAK 2.8. (**mehanizam**): Mehanizam, dat na slici, pokreće krivaja $OA=r=15cm$, koja se obrće oko ose O, ugaonom brzinom $\omega_{OA}=2rad/s=2s^{-1}=const$. Dužine štapova su $AB=CD=L=60cm$ $(AC=20cm)$. Za prikazani položaj mehanizma odrediti ugaone brzine štapova ω_{AB} i ω_{CD} i brzinu klizača D.

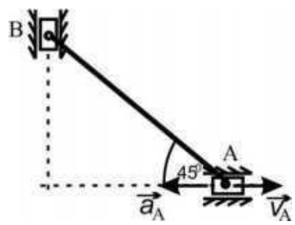


Rešenje: Brzina tačke A ima intenzitet $v_A=r\omega_{OA}$ i pravac normale na krivaju OA. Brzina tačke B je horizontalna jer se klizač kreće horizontalno. Trenutni pol brzine za štap AB je u preseku normala na brzine v_A i v_B, odnosno u datom trenutku u tački B. Brzinu tačke A možemo pisati $v_A=AB\cdot\omega_{AB}$ pa dalje sledi:

$$r\cdot\omega_{OA}=AB\cdot\omega_{AB};\qquad \omega_{AB}=\frac{r\cdot\omega_{OA}}{AB}=\frac{15\cdot 2}{60}=0{,}5\frac{rad}{s}.$$

Brzina tačke C: $v_C=BC\cdot\omega_{AB}=40\cdot 0{,}5=20cm/s$ u datom trenutku je vertikalna, brzina tačke D je stalno vertikalna. Pošto su brzine v_D i v_C paralelne, trenutni pol brzine je u beskonačnosti, $\omega_{CD}=0$, štap CD vrši trenutnu translaciju, tj. $v_D=v_C=20cm/s$.

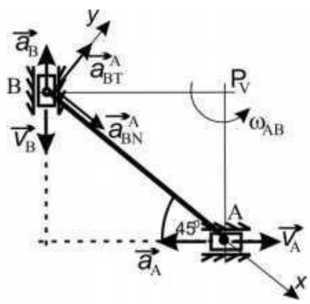
ZADATAK 2.9. (**klipni mehanizam**): U datom trenutku klizač A klipnog mehanizma ima brzinu $v_A=1{,}5\frac{m}{s}$ i ubrzanje $a_A=16\frac{m}{s^2}$ (smerovi su dati na slici). Odrediti brzinu i ubrzanje klizača B i ugaono ubrzanje poluge AB u datom položaju klipnog mehanizma ako je $AB=30cm$.



Rešenje:

Metodom projekcije brzina određujemo brzinu klizača B, v_B:

$$v_A\cos 45°=v_B\cos 45°\Longrightarrow v_B=v_A\frac{\cos 45°}{\cos 45°}=\boxed{1{,}5\frac{m}{s}}$$



Trenutni pol brzina nalazi se u preseku normala na vektore brzina $\overrightarrow{v_A}$ i $\overrightarrow{v_B}$, i rastojanje tačke A do trenutnog pola iznosi:

$$AP_V=\overline{AB}\cdot\cos 45°=0{,}3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{0{,}21m}$$

tako da je ugaona brzina: $\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP_V}=\frac{1{,}5}{0{,}21}=\boxed{7{,}14\frac{rad}{s}}$

Ubrzanje tačke B računa se na osnovu vektorske jednačine ubrzanja: $\boxed{\overrightarrow{a_B}=\overrightarrow{a_A}+\overrightarrow{a_{BN}^A}+\overrightarrow{a_{BT}^A}}$.

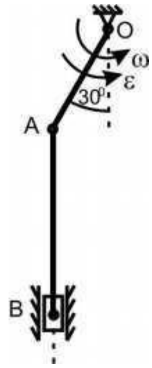
Normalna komponenta ubrzanja:	Tangencijalna komponenta ubrzanja:
$a_{BN}^{A} = \overline{AB} \cdot \omega^2 = 0{,}3 \cdot 7{,}14^2$ $\boxed{a_{BN}^{A} = 15{,}3 \frac{m}{s^2}}$	$\boxed{a_{BT}^{A} = \overline{AB} \cdot \varepsilon_{AB}}$

Projektovanje ubrzanja na *Bx* i *By* osu:

x: $a_B cos45° = a_A cos45° - a_{BN}^{A} \Longrightarrow a_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \frac{\sqrt{2}}{2} - 15{,}3 \Longrightarrow a_B = 16 - \frac{15{,}3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{-5{,}64 \frac{m}{s^2}}$

y: $a_B cos45° = -a_A cos45° + a_{BT}^{A} \Longrightarrow -5{,}64 \frac{\sqrt{2}}{2} = -16 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_{BT}^{A} \Longrightarrow a_{BT}^{A} = \boxed{7{,}32 \frac{m}{s^2}}$

Tako da ugaono ubrzanje iznosi: $\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BT}^{A}}{0{,}3} = \frac{7{,}32}{0{,}3} = \boxed{24{,}4 \frac{rad}{s^2}}$



<u>ZADATAK 2.10. (**mehanizam**)</u>: Mehanizam dat na slici pokreće pogonska poluga OA, koja se obrće oko ose O, ugaonom brzinom ω sa ugaonim ubrzanjem ε. Za prikazani položaj mehanizma odrediti ugaonu brzinu štapa AB i brzinu klizača B. Dato je: $OA = r = 4\sqrt{3}m; AB = 2r = 8\sqrt{3}m.$

U datom trenutku je $\omega = \sqrt{3}\frac{rad}{s}, \varepsilon = \sqrt{3}\frac{rad}{s^2}$.

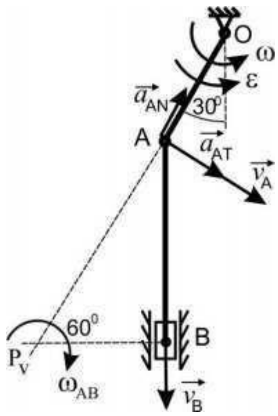
<u>Rešenje:</u>

<u>Određivanje brzina:</u>

Brzina tačke A : $v_A = OA \cdot \omega = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12 \frac{m}{s}$

Vektor brzine tačke A,$\overrightarrow{v_A}$, crta se normalno na pravac štapa OA u smeru koji diktira ugaona brzina ω. Primenom pravila projekcija brzina na pravac AB određuje se brzina tačke B, v_B:

$$v_A cos60° = v_B cos0° \Longrightarrow 12 \cdot \frac{1}{2} = v_B \cdot 1 \Longrightarrow \boxed{v_B = 6 \frac{m}{s}}$$



Štap AB vrši ravno kretanje i trenutni pol brzina P_V nalazi se u preseku normala na vektore brzina $\overrightarrow{v_A}$ i $\overrightarrow{v_B}$. Sa slike se može videti, iz trougla

ABP$_V$: $\Delta ABP_v \Rightarrow \frac{AB}{AP_v} = sin 60^0 \Rightarrow \frac{8\sqrt{3}}{AP_v} = \frac{\sqrt{3}}{2} / : \sqrt{3}$ $\boxed{AP_V = 16m}$

Tako da je ugaona brzina štapa AB: $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{12}{16} = \boxed{\frac{3}{4} \frac{rad}{s}}$

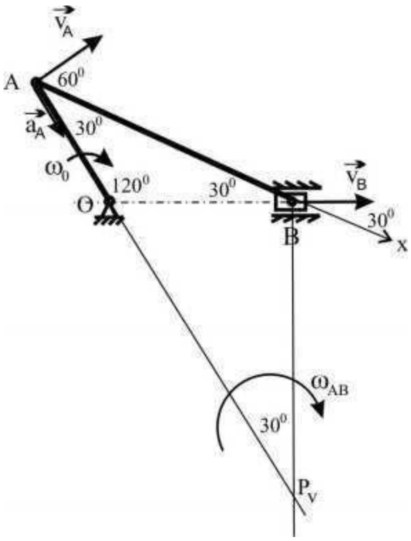
ω_{AB} crta se u smeru brzina v_A i v_B.

<u>Ubrzanje tačke A:</u> Vektorska jednačina ubrzanja tačke A glasi: $\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{AT}}$

Normalna komponenta ubrzanja tačke A:	$a_{AN} = OA \cdot \omega^2 = 4\sqrt{3}(\sqrt{3})^2 = \boxed{12\sqrt{3}\frac{m}{s^2}} \rightarrow$ **smer od A ka O**
Tangencijalna komponenta ubrzanja tačke A:	$a_{AT} = OA \cdot \varepsilon = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 = \boxed{12 \frac{m}{s^2}} \rightarrow \perp$ **OA, asmer ugaonog ubrzanja ε.**

ZADATAK 2.11. (**mehanizam**): Mehanizam dat na slici pokreće pogonska poluga OA $(OA = OB = 20m)$, koja se obrća oko ose O, ugaonom brzinom $\omega_0 = 3\frac{rad}{s} = Const.$

Za prikazani položaj mehanizma odrediti ugaonu brzinu štapa AB i brzinu klizača B.



Rešenje:

Brzina tačke A ima pravac normale na polugu AB, i ima intenzitet:

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 20 \cdot 3 = \boxed{60\frac{m}{s}}$$

Ubrzanje tačke A ima samo normalnu komponentu, jer je ugaona brzina konstantna ($\omega = Const. \rightarrow \varepsilon = 0$):

$$a_A = a_{AN} = OA \cdot \omega_0^2 = 20 \cdot 3^2 = 180\frac{m}{s^2} \rightarrow$$

ubrzanje tačke A ima pravac OA, smer ka tački O.

Primenom teoreme o projekciji brzina na pravac AB, odredićemo brzinu klizača B, v_B:

$$v_A cos60° = v_B cos0° \Longrightarrow v_B = v_A \frac{cos60°}{cos30°} = 60\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{20\sqrt{3}\frac{m}{s}} \rightarrow$$ pravac ose vođice klizača B.

Trenutni pol brzine je u preseku normala na pravce brzina v_A i v_B. U trouglu ABP$_V$ ugao $\angle A = 30°, \angle B = 120°\ i\ \angle P_V = 30°$, što znači da je trougao ABP$_V$ jednakokraki, tako da sa slike sledi: $\boxed{BP_V = AB}$

$$tg30° = \frac{OB}{BP_V} \Longrightarrow BP_V = \frac{OB}{tg30°} = \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boxed{20\sqrt{3}m = 34{,}64m}$$

Ugaona brzina štapa AB, ω_{AB} jednaka je: $\omega_{AB} = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{20\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = \boxed{1\frac{rad}{s}}$

ZADATAK 2.12. (**mehanizam**): Mehanizam koji se sastoji od tri štapa, dat na slici, pokreće pogonska poluga OA, koja se obrća oko ose O, ugaonom brzinom ω sa ugaonim ubrzanjem ε. Za prikazani položaj mehanizma odrediti ugaonu brzinu štapa AB i ugaonu brzinu štapa BC.

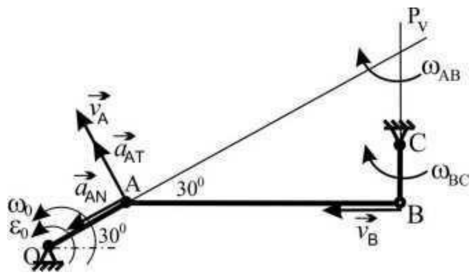
Dato je: $OA = r = 0{,}2m; BC = \frac{r}{2} = 0{,}1m; AB = 3r = 0{,}6m;\ \omega_0 = 4\frac{rad}{s};\ \varepsilon_0 = 2\frac{rad}{s^2}$

Rešenje:

Određivanje brzina i ugaone brzine:

Brzina tačke A ima pravac normale na štap OA i smer ugaone brzine ω_0, a intenzitet:

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 0{,}2 \cdot 4 = \boxed{0{,}8\frac{m}{s}}$$



Metoda projekcija brzina na pravac štapa AB:

Projekcijom brzina na pravac štapa AB nalazimo brzinu u tački B, v_B:

$$v_A cos60° = v_B cos0°$$

$$0{,}8 \cdot \frac{1}{2} = v_B \cdot 1 \Longrightarrow \boxed{v_B = 0{,}4\frac{m}{s}} \rightarrow$$ Pravac štapa AB

Trenutni pol brzina nalazi se u preseku normala na brzine v_A i v_B, pa iz trougla ABP$_V$ nalazimo BP$_V$: $tg30° = \frac{BP_V}{AB} \Rightarrow BP_V = tg30° \cdot AB = 0{,}577 \cdot 0{,}6 = \boxed{0{,}346m}$

Intenzitet ugaone brzine štapa AB, ω_{AB} iznosi: $\omega_{AB} = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{0{,}4}{0{,}346} = \boxed{1{,}16\frac{rad}{s}}$

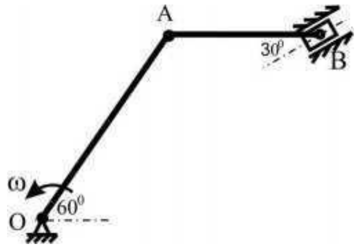
a štapa BC: $\omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{0{,}4}{0{,}1} = 4\frac{rad}{s}$.

Ubrzanje tačke A ima normalnu i tangencijalnu komponentu:

$$a_{AN} = r\omega_0^2 = 0{,}2 \cdot (4)^2 = 32\frac{m}{s^2}; \quad a_{AT} = r\varepsilon_0 = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4\frac{m}{s^2};$$

$$a_A = \sqrt{a_{AN}^2 + a_{AT}^2} = \sqrt{32^2 + 0{,}4^2} \cong 32{,}002\frac{m}{s^2}$$

ZADATAK 2.13. (**mehanizam**): Kosi klizač B i dva štapa čine mehanizam. Pogonska poluga OA obrće se oko ose O ugaonom brzinom $\omega = 2\frac{rad}{s} = Const.$



Za dati položaj mehanizma odrediti brzinu i ubrzanje klizača B i ugaono ubrzanje poluge AB.

Dato je: *OA=20 m; AB=10 m.*

Rešenje:

Određivanje brzina i ugaone brzine:

Brzina tačke A ima pravac normale na štap OA i smer ugaone brzine ω, i ima intenzitet:

$$v_A = OA \cdot \omega = 20 \cdot 2 = \boxed{40\frac{m}{s}}$$

Kako je ugaona brzina konstantna, ugaono ubrzanje je jednako nuli, pa postoji samo normalna komponenta ubrzanja, tako da je ukupno ubrzanje tačke A jednako normalnoj komponenti ubrzanja:

$$\omega = Const. \rightarrow \varepsilon = \dot{\omega} = 0 \rightarrow a_{AT} = 0$$

$$a_A = a_{AN} = OA \cdot \omega^2 = 20 \cdot 2^2 = \boxed{80\frac{m}{s^2}} \rightarrow \text{ Smer ka tački O}$$

Metoda projekcija brzina:

$$v_A cos30° = v_B cos30° \Rightarrow \boxed{v_B = v_A = 40\frac{m}{s}} \rightarrow \text{ Pravac ose vođice klizača B}$$

Trenutni pol brzina nalazi se u preseku normala na brzine v_A i v_B $\Rightarrow \Delta ABP_V$ –jednakostranični:

$$AP_V = BP_V = AB = 10m \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{40}{10} = \boxed{4\frac{rad}{s}}$$

Određivanje ubrzanja klizača B:

Vektorska jednačina ubrzanja tačke B: $\boxed{\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{BN}^A} + \overrightarrow{a_{BT}^A} \ldots (1)}$

$$a_{BT}^A = AB \cdot \varepsilon_{AB} = \boxed{10 \cdot \varepsilon_{AB}} \rightarrow \text{ Pravac AB, smer ka tački A}$$

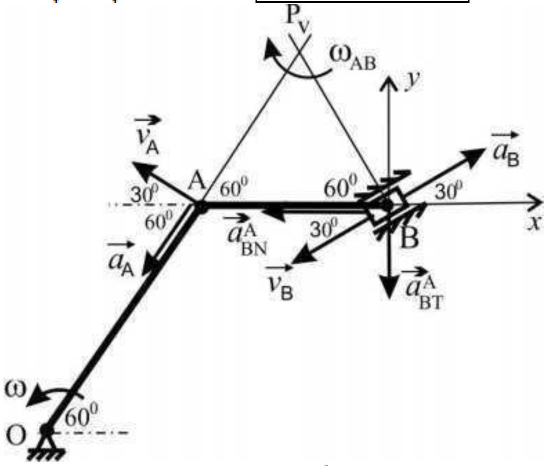
$$a_{BN}^A = AB \cdot \omega_{AB}{}^2 = 10 \cdot 4^2 = \boxed{160\frac{m}{s^2}} \rightarrow \text{Pravac normalan na AB, smer pretpostavljamo}$$

Koordinatni sistem *Bxy* postavljamo u proizvoljnom položaju, zatim se vrši projekcija jednačine (1) na ose *Bx* i *By*:

$$B_x: \quad a_B cos30° = -a_A cos60° - a_{BN}^A + 0$$

$$a_B\frac{\sqrt{3}}{2} = -80 \cdot \frac{1}{2} - 160 \Rightarrow a_B\frac{\sqrt{3}}{2} = -200 \Rightarrow a_B\sqrt{3} = -400$$

$$a_B = -\frac{400}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad \boxed{a_B = -\frac{400\sqrt{3}}{3}\frac{m}{s^2}}$$



$$B_y: \quad a_B \sin 30° = -a_A \sin 60° - 0 - a_{BT}^A$$

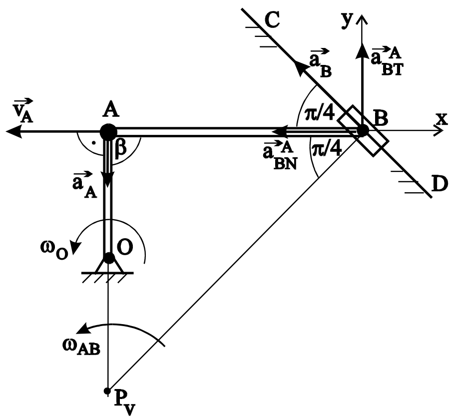
$$-\frac{400\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = -80\frac{\sqrt{3}}{2} - a_{BT}^A$$

$$a_{BT}^A = \frac{200\sqrt{3}}{3} - 40\sqrt{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3} - \frac{120\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{80\sqrt{3}}{3}\frac{m}{s^2}}$$

$$a_{BT}^A = 10 \cdot \varepsilon_{AB} \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BT}^A}{10} = \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{3}\frac{rad}{s^2}}$$

Pretpostavljeni smer a_{BT}^A je ispravljen a smer vektora $\overrightarrow{a_B}$ treba ispraviti tj. ubrzanje $\overrightarrow{a_B}$ ima isti smer kao i brzina $\overrightarrow{v_B}$.

ZADATAK 2.14. (**mehanizam**): Krivaja *OA*, dužine *40cm*, okreće se oko ose O dovodeći u kretanje štap *AB*, dužine *80cm*. Kraj B štapa vezan je za klizač koji se kreće po pravolinijskoj vođici, koja sa horizontalom gradi ugao $\pi/4=45^0$. Štapovi su na krajevima vezani zglobno. Naći ubrzanje klizača B i ugaono ubrzanje štapa AB u trenutku kada je ugao $\beta=\pi/2=90^0$, ugaona brzina i ugaono ubrzanje krivaje OA jednaki $\omega_0=2rad/s$ i $\varepsilon_0=0$.



Rešenje: Brzina tačke A ima pravac normale na krivaju $OA=0{,}4m$ i intenzitet $v_A = OA \cdot \omega_0 = 0{,}8\frac{m}{s}$. Ubrzanje tačke A ima samo normalnu komponentu ($a_{AT}=OA\cdot\varepsilon=0$) $a_A = a_{AN} = OA \cdot \omega_O^2 = 1{,}6\frac{m}{s^2}$, (pravac *OA*, smer ka O). Trenutni pol brzine je u preseku normale na pravce brzina v_B i v_A. Iz jednakokrakopravouglog trougla ABP_v je $AP_v=AB=80cm=0{,}8m$, pa je ugaona brzina štapa *AB*:

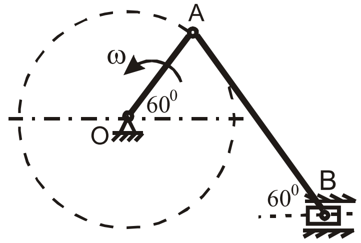
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_v} = \frac{0{,}8}{0{,}8} = 1\frac{rad}{s} = 1s^{-1}.$$

Ubrzanje tačke B biće jednako: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$, gde je: $a_{BN}^A = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}8\frac{m}{s^2}$ (usmereno od B prema A). Komponenta a_{BT}^A je normalna na pravac *AB*, u smeru obrtanja. Ubrzanje a_B ima pravac kretanja klizača po pravolinijskoj vođici *CD*, smer ćemo pretpostaviti prema tački C. Projektovaćemo vektorsku jednačinu na ose koordinatnog sistema *Bxy* i dobićemo sistem jednačina:

$-a_B \cos 45^0 = -a_{BN}^A,$

$a_B \sin 45^0 = -a_A + a_{BT}^A;$

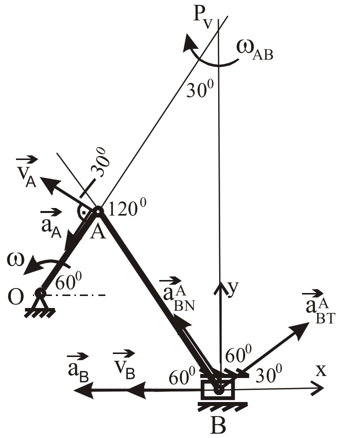
čijim rešavanjem slede vrednosti: $a_B = 0{,}8\sqrt{2}\,\frac{m}{s^2};\ a_{BT}^A = 2{,}4\,\frac{m}{s^2},\quad \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BT}^A}{AB} = 3\frac{rad}{s^2} = 3s^{-2}.$



ZADATAK 2.15. (**mehanizam**): Ravni mehanizam čine poluga $OA=40cm$, poluga $AB=160cm$ i klizač B. Poluga OA rotira oko nepomične ose O konstantnom ugaonom brzinom $\omega=4rad/s=4s^{-1}$ a klizač B se kreće po horizontalnoj vođici. Za prikazani položaj naći ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje poluge AB, brzinu i ubrzanje klizača B.

Rešenje: Poluga OA vrši obrtno kretanje oko nepomične ose O, pa je vektor brzine $\vec{v}_A$ normalan na polugu OA, u smeru ugaone brzine ω, veličine: $v_A = OA\cdot\omega = 0{,}4\cdot 4 = 1{,}6\frac{m}{s}$. Pošto je $\omega=const$ ubrzanje tačke A ima samo normalnu komponentu ($\omega = const. \to \varepsilon = \dot{\omega} = 0 \to a_{AT} = OA\cdot\varepsilon = 0$) :

$a_A = a_{AN} = OA\cdot\omega^2 = 6{,}4\frac{m}{s^2}$, ($\vec{a}_A$ u pravcu OA, usmeren ka O).



Vektor $\vec{v}_B$ ima pravac ose vođice po kojoj se kreće klizač, saglasno smeru kretanja tačke A usmeren ulevo. U datom položaju mehanizma, poluge OA i AB grade među sobom ugao 60^0, pa je ugao između vektora $\vec{v}_A$ i produženog pravca poluge AB jednak 30^0. Kada primenimo teoremu o projekcijama brzina dobićemo:

$$v_B \cos 60^0 = v_A \cos 30^0 \to v_B\frac{1}{2} = 160\frac{\sqrt{3}}{2}\ /\cdot 2 \to v_B = 160\sqrt{3} = 2{,}77\frac{m}{s}.$$

Poluga AB vrši ravno kretanje i trenutni pol brzina P_V nalazi se u preseku normala na vektore brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$. U trouglu ABP_V ugao $\angle A=180^0-60^0=120^0$; $\angle B=90^0-60^0=30^0$; $\angle P_V=360^0-(150^0)=30^0$; što znači da je trougao jednakokraki tj. $AP_V=AB=160cm=1{,}6m$.

Ugaona brzina poluge AB: $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{160}{160} = 1\frac{rad}{s}$, (usmerena kao brzine $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ oko pola P_V).

Ubrzanje klizača B ima pravac ose vođice, smer pretpostavljamo a računa se: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$.

Komponenta $\vec{a}_{BN}^A$ ima intenzitet $a_{BN}^A = AB\cdot\omega_{AB}^2 = 1{,}6\cdot 1^2 = 1{,}6\frac{m}{s^2}$, (pravac AB, smer od B ka A).

Komponenta $\vec{a}_{BT}^A$ biće $a_{BT}^A = AB\cdot\varepsilon_{AB} = 1{,}6\cdot\varepsilon_{AB}$, (pravac normale na AB, smer pretpostavljamo).

Projektovanjem jednačine $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$ na ose Bx i By dobićemo:

$$Bx:\ -a_B = -a_A\cos 60^0 - a_{BN}^A\cos 60^0 + a_{BT}^A\cos 30^0,\qquad -a_B = -6{,}4\cdot\frac{1}{2} - 1{,}6\cdot\frac{1}{2} + 1{,}6\cdot\varepsilon_{AB}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

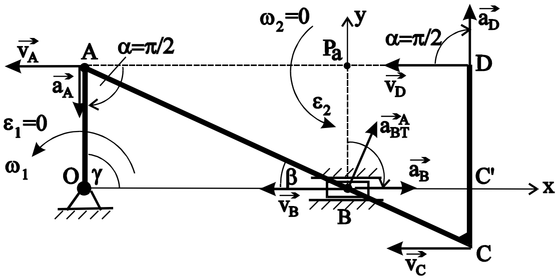
$$\to\ -a_B = -3{,}2 - 0{,}8 + 0{,}8\sqrt{3}\cdot\varepsilon_{AB}\ /\cdot(-1)\qquad a_B + 0{,}8\sqrt{3}\cdot\varepsilon_{AB} = 4 ....(1)$$

$$By:\ 0 = -a_A\sin 60^0 + a_{BN}^A\sin 60^0 + a_{BT}^A\sin 30^0,\qquad 0 = -6{,}4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1{,}6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1{,}6\cdot\varepsilon_{AB}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\to\ 0 = -3{,}2\sqrt{3} + 0{,}8\sqrt{3} + 0{,}8\cdot\varepsilon_{AB}\qquad 2{,}4\sqrt{3} = 0{,}8\cdot\varepsilon_{AB}\ ....(2)\quad \to \varepsilon_{AB} = \frac{2{,}4\sqrt{3}}{0{,}8} = 3\sqrt{3}\frac{rad}{s^2}$$

Iz jednačine (1) sledi: $a_B + 0{,}8\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} = 4 \to\ a_B + 7{,}2 = 4 \to\ a_B = -7{,}2 + 4 = -3{,}2\frac{m}{s^2}$.

Negativni predznak u rešenju za a_B ukazuje da je smer ubrzanja pogrešno pretpostavljen, tj. da je vektor $\vec{a}_B$ usmeren suprotno od smera brzine $\vec{v}_B$ na slici (usporeno kretanje).



ZADATAK 2.16. (**mehanizam**): Dat je ravni klipni mehanizam čija se krivaja $OA=R=20cm$ okreće konstantnom ugaonom brzinom $\omega_1=10rad/s$ oko nepokretne ose O i dovodi u kretanje spojnu polugu ABCD ($BC=R=20cm$) i klizač B. Odrediti ubrzanje tačke D u vremenskom trenutku kada je ugao $\gamma=90^0$, $\beta=30^0$, OA||CD, AD||OB. Tačke A i B su zglobovi.

Rešenje: Za tačku A imaćemo

$$v_A = OA \cdot \omega_1 = R \cdot \omega_1 = 0{,}2 \cdot 10 = 2m/s,$$

$$a_A = a_{AN} = R \cdot \omega_1^2 = 0{,}2 \cdot 10^2 = 20m/s^2 \ \ (\omega_1 = const. \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,\ a_{AT} = R\varepsilon_1 = 0).$$

Ako primenimo teoremu o projekcijama brzina na pravac AB imaćemo $v_A cos\beta = v_B cos\beta$, tj. $v_A = v_B$, tj. poluga ABCD se trenutno kreće translatorno pa je $v_A = v_B = v_C = v_D$ a ugaona brzina $\omega_2=0$. Položaj trenutnog pola ubrzanja određuje ugao: $tg\alpha = \frac{|\varepsilon_2|}{\omega_2^2} = \frac{|\varepsilon_2|}{0} = \infty \Rightarrow \alpha = 90^0.$

Pošto je poznat pravac ubrzanja klizača B, trenutni pol ubrzanja nalaziće se u preseku pravih koje sa ubrzanjima a_A i a_B grade ugao $\alpha=90^0$ - to je tačka P_a. Radi određivanja ugaonog ubrzanja ε_2 pisaćemo izraz za ubrzanje tačke B: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A;$ u kome je $a_{BN}^A = AB \cdot \omega_2^2 = 0.$ Projektovanjem na osu By dobićemo:

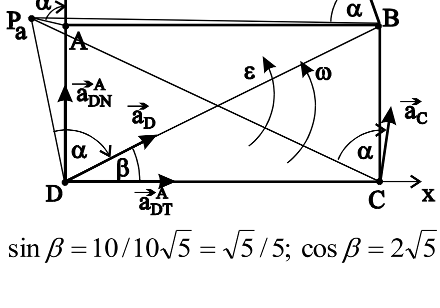
$$0 = -a_A + a_{BT}^A cos30^0 \Rightarrow a_{BT}^A = \frac{a_A}{cos30^0} = 23{,}09m/s^2;$$

$$a_{BT}^A = AB \cdot \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_{BT}^A}{AB} = \frac{2309{,}4}{40} = 0{,}58rad/s^2.$$

Pošto je ugaono ubrzanje dobijeno sa pozitivnim znakom, znači da je smer a_{BT}^A bio dobro pretpostavljen. Sa slike je $DP_a=BC'=BCcos30^0$, pa će ubrzanje tačke D imati intenzitet:

$a_D = DP_a\sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2} = 0{,}173 \cdot \varepsilon_2 = 10m/s^2$, i gradi sa pravcem DP_a ugao $\alpha=90^0$.

ZADATAK 2.17. (**ravna ploča**): Pravougaonik ABCD kreće se u ravni. Ubrzanje temena A upravno je na stranicu AB, sa intenzitetom $a_A=10cm/s^2$. Ubrzanje temena D ima pravac dijagonale DB a intenzitet $a_D = 20\sqrt{5}cm/s^2$. Odrediti ubrzanja temena C ako su dužine $AD=BC=10cm$, $AB=CD=20cm$.



Rešenje: Prvo se određuju ugaona brzina i ugaono ubrzanje pravougaonika (smerovi za ω i ε nisu unapred zadati, pa se biraju slobodno). Zato pišemo:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DN}^A + \vec{a}_{DT}^A,$$

pa jednačinu projektujemo na ose Dxy i dobijamo:

$$a_D \cos\beta = a_{DT}^A,$$

$$a_D \sin\beta = a_A + a_{DN}^A.$$

Pošto je $DB = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}cm$, sledi:

$$\sin\beta = 10/10\sqrt{5} = \sqrt{5}/5; \ \cos\beta = 2\sqrt{5}/5.$$

$$a_{DT}^{A}=20\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}/5=40\frac{cm}{s^2}, a_{DN}^{A}=20\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}/5-10=10\frac{cm}{s^2};$$

$$a_{DT}^{A}=AD\cdot\varepsilon\Rightarrow\varepsilon=\frac{a_{DT}^{A}}{AD}=4\frac{rad}{s^2}; a_{DN}^{A}=AD\cdot\omega^2\Rightarrow\omega^2=\frac{a_{DN}^{A}}{AD}=1,\quad \omega=1\frac{rad}{s}.$$

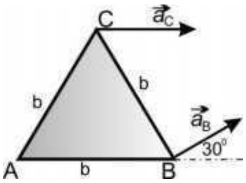
Položaj Pa: $tg\alpha=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}=\frac{4}{1}=4\Rightarrow\alpha=75{,}96^0$, $AP_a=\frac{a_A}{\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}}=\frac{10\sqrt{17}}{17}=2{,}425cm$.

Da bi smo odredili intenzitet ubrzanja tačke C potrebno je rastojanje CP_a. Iz trougla CDP_a sledi:

$CP_a=\sqrt{DP_a^2+DC^2-2\cdot DP_a\cdot DC\cdot\cos(\beta+\alpha)}=24{,}74cm.$ Pa je $a_C=CP_a\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}=102\frac{cm}{s^2}$.

ZADATAK 2.18. (**ravna ploča**): Jednakostranični trougao stranice b kreće se u ravni. Vektor ubrzanja temena B gradi ugao od 30^0 u odnosu na pravac stranice AB. Ubrzanje temena C ima pravac horizontale. Odrediti ubrzanje temena A ako je dato:

$$a_B=10\frac{m}{s^2};\ a_C=10\sqrt{3}\frac{m}{s^2};\ b=10m$$



Rešenje:

Prvo se određuju ugaona brzina i ugaono ubrzanje (smerovi za ω i ε nisu unapred zadati pa se biraju proizvoljno), tako da vektorska jednačina ubrzanja za tačku C glasi (1):

Vektorska jednačina ubrzanja tačke C: $\boxed{\vec{a_C}=\vec{a_B}+\overrightarrow{a_{CN}^{B}}+\overrightarrow{a_{CT}^{B}}\ ...(1)}$

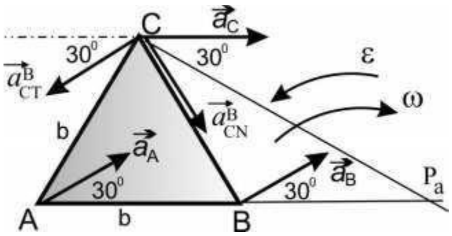
Normalna komponenta ubrzanja: $a_{CN}^{B}=\overline{CB}\cdot\omega^2=b\cdot\omega^2=\boxed{10\omega^2}$

Tangencijalna komponenta ubrzanja: $a_{CT}^{B}=\overline{CB}\cdot\varepsilon=b\cdot\varepsilon=\boxed{10\varepsilon}$

Projektovanjem jednačine (1) na ose Cx i Cy dobija se:

x: $a_C=a_B cos30°+a_{CN}^{B}cos60°-a_{CT}^{B}cos30°\ ...(1')$

y: $0=a_B sin30°-a_{CN}^{B}sin60°-a_{CT}^{B}sin30°\ ...(1'')$



Iz $(1')$i$(1'')$ jednačine dobija se:

$$(1')\Rightarrow\quad 10\sqrt{3}=10\frac{\sqrt{3}}{2}+10\omega^2\cdot\frac{1}{2}-10\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 5\sqrt{3}=5\omega^2-5\varepsilon\sqrt{3}$$

$$(1'')\Rightarrow\quad 0=10\cdot\frac{1}{2}-10\omega^2\frac{\sqrt{3}}{2}-10\varepsilon\frac{1}{2}\Rightarrow 5=5\omega^2\sqrt{3}+5\varepsilon\Rightarrow 1=\omega^2\sqrt{3}+\varepsilon$$

$$\varepsilon=1-\omega^2\sqrt{3}$$

Kada se vratimo u jednačinu $(1')$, dobijamo ugaonu brzinu, a zatim i ugaono ubrzanje:

$$(1')\Rightarrow\quad 5\sqrt{3}=5\omega^2-5\sqrt{3}+5\omega^2\sqrt{3}\sqrt{3}$$

Ugaona brzina: $10\sqrt{3}=5\omega^2+15\omega^2\Rightarrow 10\sqrt{3}=20\omega^2\Rightarrow\boxed{\omega^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{rad^2}{s^2}}$

Ugaono ubrzanje: $\varepsilon=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{rad}{s^2}}\rightarrow$ Suprotan smer.

Položaj trenutnog pola ubrzanja određuje ugao: $tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 30^\circ}$

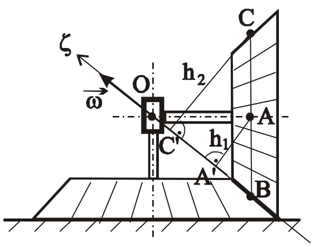
Pošto je poznat pravac ubrzanja a_C i a_B, trenutni pol ubrzanja nalazi se u preseku pravih koje sa ubrzanjima a_C i a_B grade ugao od 30^0 - to je tačka P_a, pa je rastojanje CP_a:

$$CP_a = \frac{a_C}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}} = \boxed{10\sqrt{3}m}$$

Ubrzanje tačke A ima intenzitet:

$$a_A = AP_a\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = (AB + BP_a) \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = (10 + 10) \cdot \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \qquad \boxed{a_A = 20\frac{m}{s^2}}$$

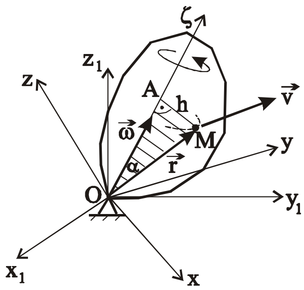
2.6. OBRTANJE KRUTOG TELA OKO NEPOKRETNE TAČKE (SFERNO KRETANJE)



Pri ovom kretanju jedna tačka (oslonac O) ostaje nepokretna u toku kretanja, sve tačke se kreću po površinama sfera sa centrom O.
Npr: kretanje čigre, kretanje koničnog zupčanika.

Uglovi kojima se može opisati ovo kretanje (Ojlerovi uglovi) imaju nazive: ***ugao sopstvene rotacije***, ***ugao precesije*** i ***ugao nutacije***; njihove zavisnosti od vremena predstavljaju jednačine kretanja pri obrtanju tela oko nepokretne tačke.

Osa $O\zeta$ – trenutna osa obrtanja (oko koje se telo obrtanjem dovodi iz jednog u drugi, susedni položaj) je osa koja menja svoj položaj u toku kretanja. Sferno kretanje se sastoji od niza rotacija oko trenutnih osa obrtanja, koje prolaze kroz tačku O. Trenutna ugaona brzina $\vec{\omega}$ oko ose $O\zeta$, je vektor usmeren duž trenutne ose obrtanja.



Tačka M rotira po kružnoj putanji pa je intenzitet brzine tačke M: $\boxed{v=h\cdot\omega}$ gde je h - rastojanje do trenutne ose rotacije, koje je sa slike jednako $h=r\sin\alpha$ (α je ugao između vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$, $\vec{r}$ - vektor položaja tačke). Dalje sledi izraz $v=r\omega\sin\alpha$. koji predstavlja veličinu vektorskog proizvoda $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$.

Ojlerova formula za određivanje brzine tačke pri sfernom kretanju glasi $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} x \vec{r}}$.

Vektor brzine $\vec{v}$ je upravan na ravan koju čine vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$. Smer vektora $\vec{v}$ je takav da se iz vrha ovog vektora vidi prevođenje vektora $\vec{\omega}$ u vektor $\vec{r}$, najkraćim putem, u pozitivnom matematičkom smeru.