u ravni yz i silom $\vec{F}_2$ u ravni xz. Poprečne sile i momenti savijanja određeni su kao da se radi o dve grede koje su prikazane na slikama b) i c).

Ovakvo spoljašnje opterećenje savija gredu u ravnima xz i yz pa je postupak određivanja poprečnih sila i momenata savijanja isti ranije opisanom. Ako sile imaju komponente u pravcu ose z one će izazvati pojavu uzdužnih sila koje se određuju na način izložen za jednostavnu gredu.

**Greda opterećena na savijanje i uvijanje (torziju)**

Sila $\vec{F}_1$, koja deluje na gredu, paralelna je osi y a deluje na kraju sekundarnog oslonca CE koji je upravan na osu grede i leži u ravni xz. Sila $\vec{F}_2$ paralelna je osi x a deluje na kraju sekundarnog oslonca DF koji je upravan na osu grede a leži u ravni yz. Izvršimo li paralelni pomak sile $\vec{F}_1$ tako da joj pravac delovanja seče osu grede u tački C trebamo dodati redukcioni spreg veličine (slika b):

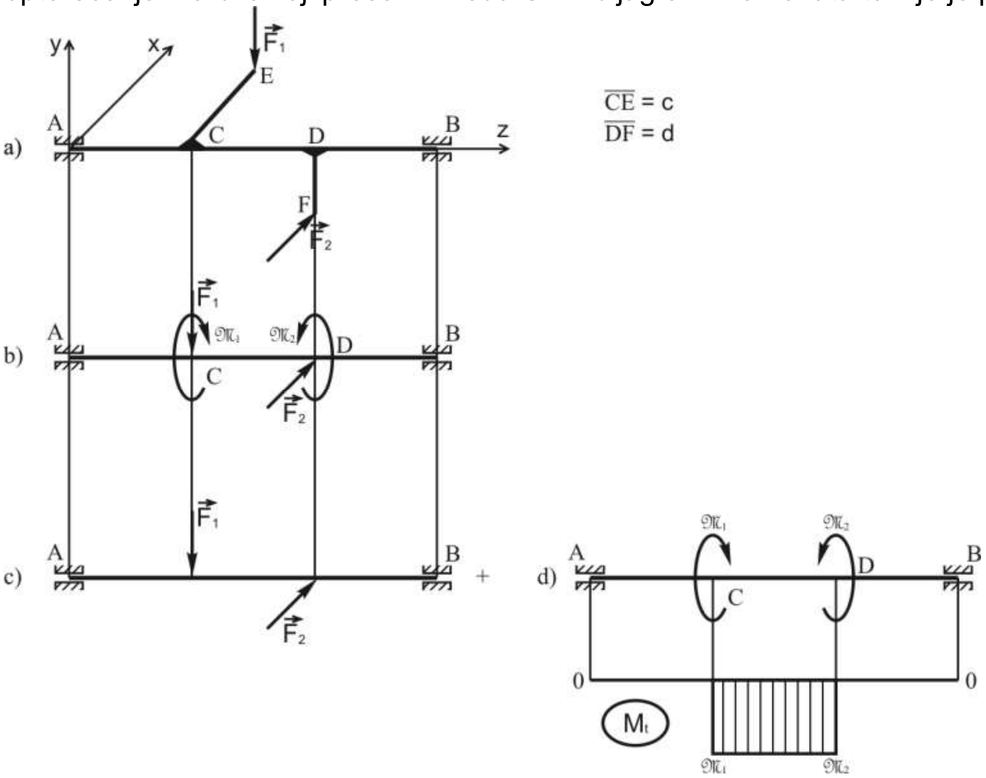
$$M_1 = F_1 \cdot c$$

čiji vektor "gleda" u smeru negativnog dela ose z (momenat torzije ili uvijanja jer nastoji uviti gredu). Za paralelni pomak sile $\vec{F}_2$ iz F u D trebamo dodati pozitivni redukcioni spreg ( momenat uvijanja):

$$M_2 = F_2 \cdot d$$

Dalje se opterećenje grede može rastaviti na slučajeve prikazane na slikama c) i d) i odrediti unutrašnje sile i momente posebno za svaki slučaj. Kako je slučaj prikazan na slici c) savijanje u dve ravni identičan prethodnom to se on neće razmatrati.

Za slučaj d) greda se nalazi u ravnoteži ako su spregovi istih veličina a suprotnih smerova, s obzirom da na aktivno opterećenje ležajevi grede ne daju nikakvu reakciju. U presecima od A do C i od D do B ne pojavljuju se niti sile niti momenti, jer na te delove grede ne deluje spoljašnje opterećenje. Za bilo koji presek između C i D dijagram momenata torzije je prikazana na slici .




Primer određivanja momenata uvijanja:

$$F_1 = 10N \quad F_2 = 5N$$

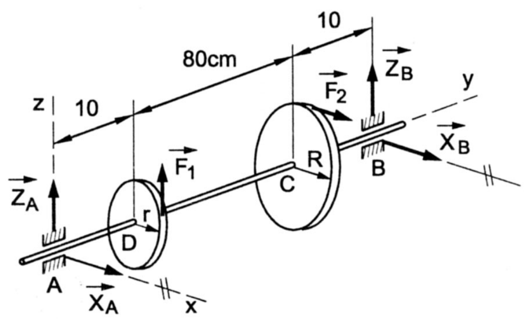
$$r = 10cm = 0{,}1m \quad R = 20cm = 0{,}2m$$

Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ opterećuju gredu na savijanje i uvijanje.

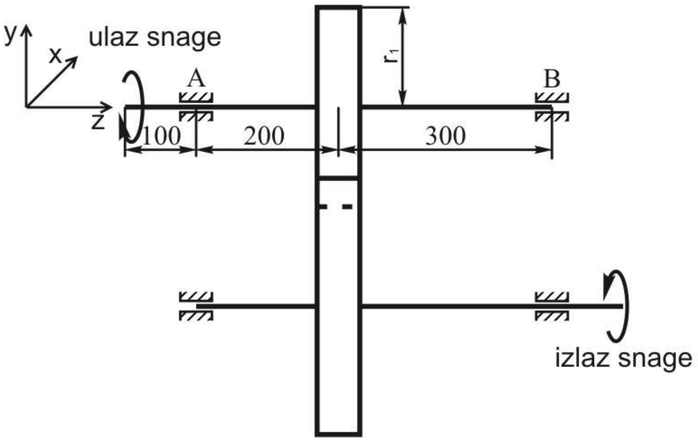
Momenti uvijanja iznose:

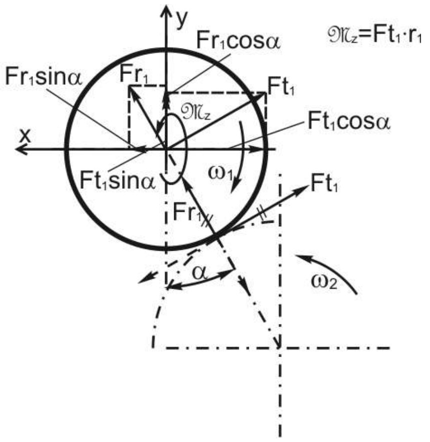
$$M_1 = F_1 \cdot r = 10 \cdot 0{,}1 = 1Nm$$

$$M_2 = F_2 \cdot R = 5 \cdot 0{,}2 = 1Nm$$



**Primer 1.** Za pogonsko vratilo AB, težine G=60N reduktora prikazanog na slici, koje treba da prenosi obrtni moment M = 30Nm (pogon prenosnika ostvaruje se preko spojnice) posredstvom cilindričnog zupčastog para sa pravim zubima potrebno je izračunati: obimnu (tangentnu) silu zupčanika reakcije u ležajevima i i nacrtati statičke dijagrame u ravnima savijanja i dijagram uvijanja. Ležajevi A i B su cilindrični. Dato je: $r_1$= 80mm (poluprečnik kinematske kružnice), $G_1$ =30N (težina zupčanika), $\alpha = 30^0$ (ugao kontakta zupčanika) i $F_r$=0.2$F_t$ (radijalna sila). Trenje u ležajima vratila i između zubaca se ne uzima u obzir.




Rešenje:
Pogonsko vratilo je prostorno opterećeni nosač izložen savijanju i uvijanju. Vratilo će se rešiti tako što će se prostorni sistem sila razložiti na dva ravanska sistema (horizontalna x-z i vertikalna y-z ravan). Obzirom da na obrtni moment ležajevi vratila ne daju nikakve reakcije sledi da obrtni moment mora biti jednak obrtnom dejstvu od sile $F_{t1}$.

$F_{t_1} \cdot r_1 =$ M$\Rightarrow F_{t_1} = \dfrac{30}{0.08} = 375N$ , $\quad F_r = 0.2 \cdot 375 = 75N$

$F_y = F_{r_1}\cos\alpha + F_{t_1}\sin\alpha = 252.45N$

$F_x = F_{r_1}\sin\alpha - F_{t_1}\cos\alpha = -287.26N$

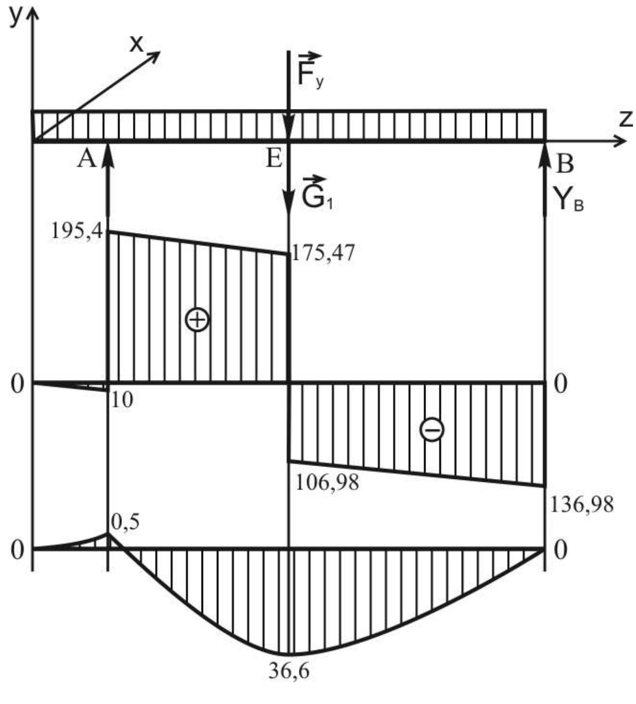
**ravan y-z (vertikalna)**

- specifično opterećenje $q = \dfrac{G}{l} = \dfrac{60}{0.6} = 100\dfrac{N}{m}$

Jednačine ravnoteže (paralelni sistem sila):

1. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = F_y + G_1 + G \Rightarrow Y_A + Y_B = 342.45N$
2. $\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 0.2 - \left(F_y + G_1 + G\right)\cdot 0.2 = 0 \Rightarrow Y_B = 136.98N$

1. $\Rightarrow Y_A = 205.47N$



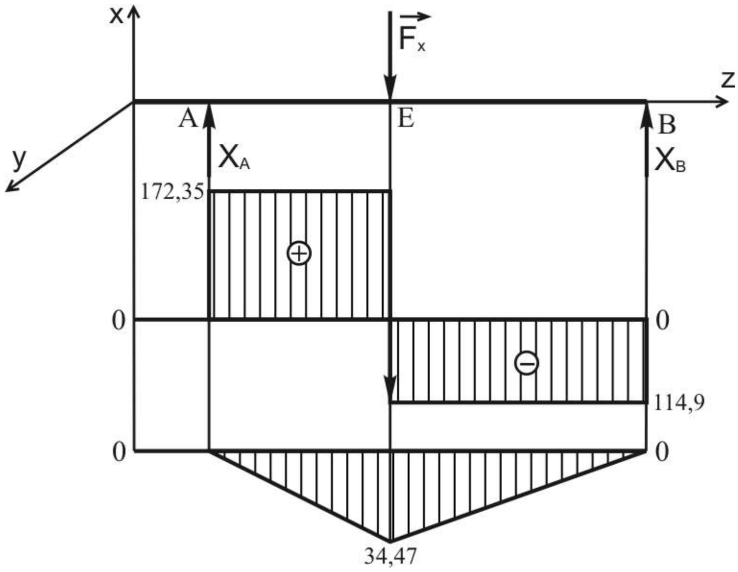
**ravan x-z (horizontalna)**

Jednačine ravnoteže (paralelni sistem sila):

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + X_B = F_x = 287.26N$

2. $\sum M_A = 0 \Rightarrow X_B \cdot 0.5 - F_x \cdot 0.2 = 0 \Rightarrow X_B = 114.9N$

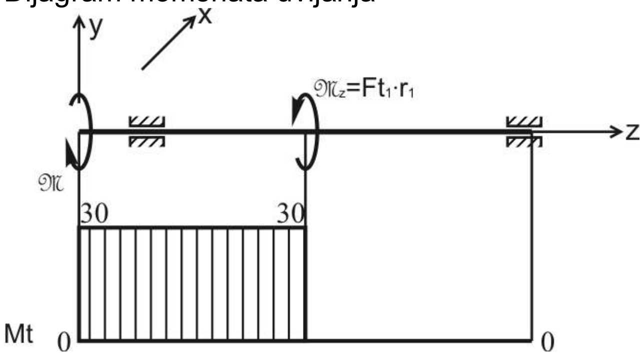
1. $\Rightarrow X_A = 172.36N$



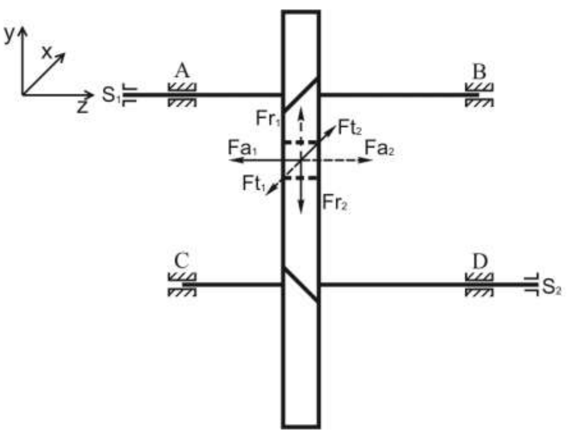

Ukupni moment savijanja u karakterističnom preseku (tačka E) određujemo primrnom pitagorine teoreme:

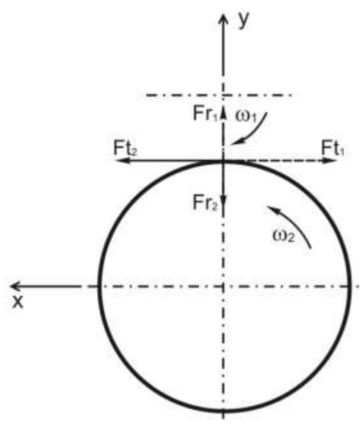
$$M_{sE} = \sqrt{M_{xE}^2 + M_{yE}^2} = 50.27Nm$$

Dijagram momenata uvijanja



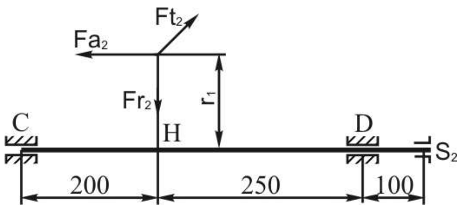

Primer 2. Za gonjeno (izlazno) vratilo CD, reduktora (prikazanog na slici) sa kosim zubima, potrebno je izračunati: obrtni moment na spojnici $S_2$ (priključak radne mašine), otpore ležišta C i D, nacrtati statičke dijagrame u vertikalnoj (y-z) i horizontalnoj (x-z) ravni i dijagram uvijanja. Ležaj C je radijalno-aksijalni a ležaj D je radijalni. Dato je: $r_2$= 120mm (poluprečnik kinematske kružnice), $G_2$=45N (težina zupčanika), $\alpha = 0^0$ (ugao kontakta zupčanika), $F_{t2}$=400N (obimna sila) $F_{r2}=0.2F_{t2}$=80N (radijalna sila) i $F_{a2}$= $0.15F_{t2}$=60N (aksijalna sila). Težina vratila i trenje u ležajima vratila između zubaca se ne uzima u obzir.



Rešenje:

Ostvareni obrtni momenat na zupčaniku 2 se uravnotežava na spojnici S₂: $F_{t2} \cdot r_2 =$ M₂$= 400 \cdot 0.12 = 48Nm$




**ravan y-z (vertikalna)**

M$_x$$= F_{a2} \cdot r_2 = 60 \cdot 0.12 = 7.2Nm$ $\qquad F_y = F_{r2} = 80N$

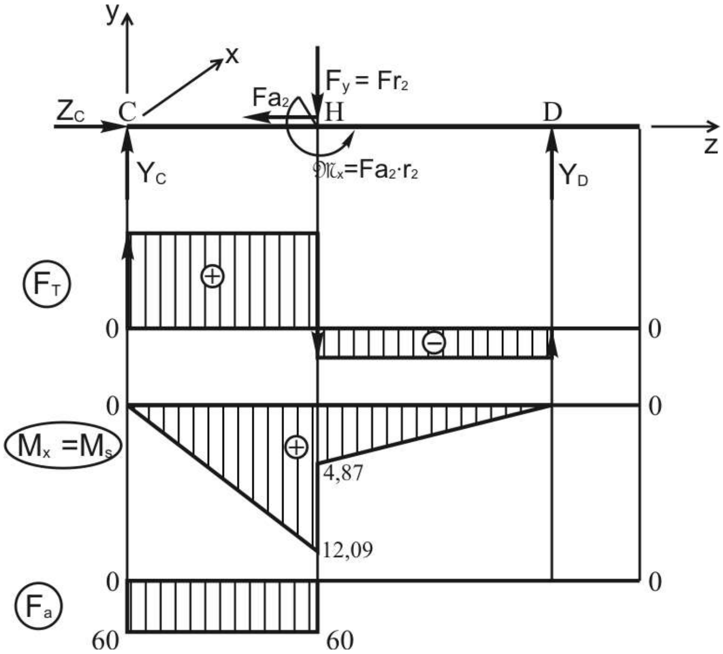
Jednačine ravnoteže (proizvoljni sistem sila u ravni):

1. $\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_C - F_{a2} = 0 \Rightarrow Z_C = F_{a2} = 60N$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_C - F_y + Y_D = 0 \Rightarrow Y_C + Y_D = 80N$

3. $\sum M_C =$ M$_x$$- F_y \cdot 0.2 + Y_D \cdot 0.45 = 0 \Rightarrow Y_D = 19.55N$

2. $\Rightarrow Y_C = 60.45N$



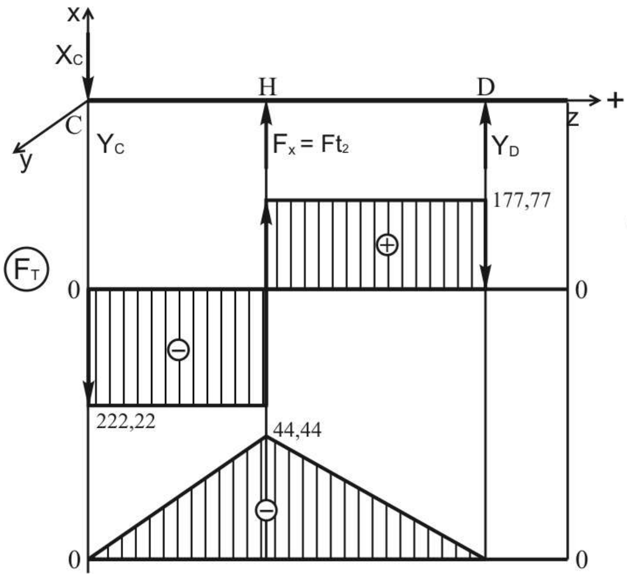

**ravan x-z (horizontalna)** $\quad F_x = F_{t2} = 400N$

Jednačine ravnoteže (paralelni sistem sila u ravni):

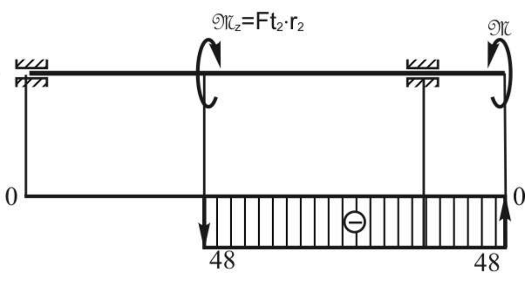
1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow X_C + X_D = F_x = 400N$

2. $\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{t2} \cdot 0.2 - X_D \cdot 0.45 = 0 \Rightarrow X_D = 177.77N$

1. $\Rightarrow X_C = 222.22N$



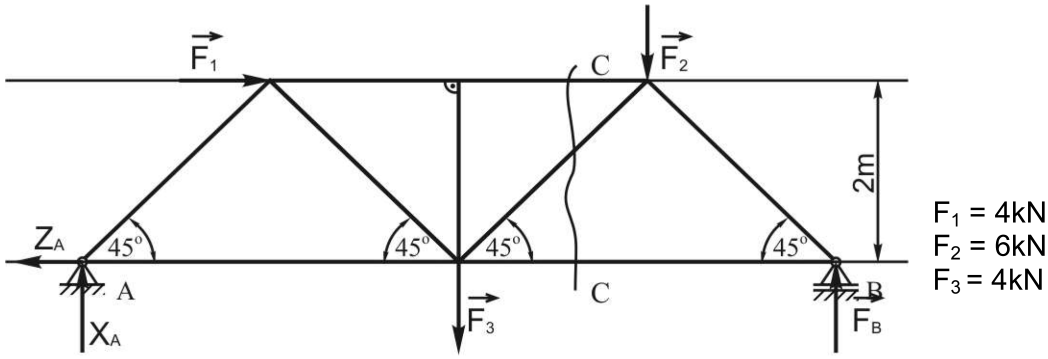

Dijagram momenata uvijanja




Ukupni moment savijanja u karakterističnom preseku (tačka H) određujemo primrnom pitagorine teoreme: $\qquad M_{sH} = \sqrt{M_{xH}^2 + M_{yH}^2} = 46.05Nm$

# REŠETKASTI NOSAČI

1. Za dati rešetkasti nosač:
a) analitičkim  putem naći otpore oslonaca
b) koristeći Kremonin plan sila odrediti sile u štapovima
c) u preseku c-c odrediti sile u štapovima metodama Kulmana i Ritera




Rešetka ima n = 6 čvorova i s = 9 štapova   s = 2n - 3 = 9 - uslov nepromenljivosti forme ravnog rešetkastog nosača je zadovoljen, tj. ova rešetka predstavlja krutu figuru. Za rešetkasti nosač koji se kao celina nalazi u ravnoteži pod dejstvom zadatih aktivnih sila i odgovarajućih reakcija veza sa okolinom možemo reći da se svi njegovi čvorovi nalaze u ravnotežnom stanju. Shvatimo li čvorove kao čestice a štapove kao njihove veze, tada možemo čvorove osloboditi veza koje moramo prema aksiomu oslobađanja od veza nadomestiti reakcijama koje će obezbediti ravnotežu čvorova. Svaki štap je nadomešten sa parom sila koje imaju istu veličinu i pravac delovanja ali suprotan smer što proizilazi iz principa jednakosti akcije i reakcije.

**a) Određivanje otpora oslonaca**

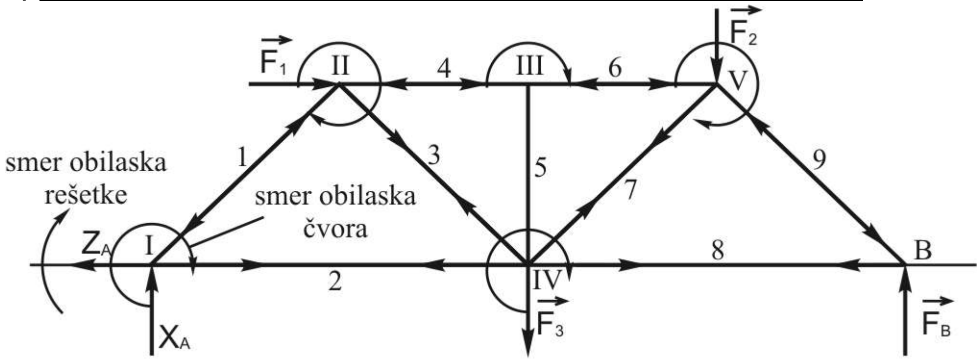
1. $\sum_{i=1}^{n} M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -F_1 \cdot 2 - F_3 \cdot 4 - F_2 \cdot 6 + F_B \cdot 8 = 0 \Rightarrow F_B = 7.5kN$

2. $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + F_1 = 0 \Rightarrow Z_A = F_1 = 4kN$

3. $\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - F_3 - F_2 + F_B = 0 \Rightarrow Y_A = 2.5kN$

Ravni rešetkasti nosač je sistem zglobno vezanih štapova koji svi leže u jednoj ravni i formiraju proizvoljan ali konačan broj trouglova.

**b) <u>Grafičko određivanje sila u štapovima – Kremonin plan sila</u>**




Postupak je sledeći:

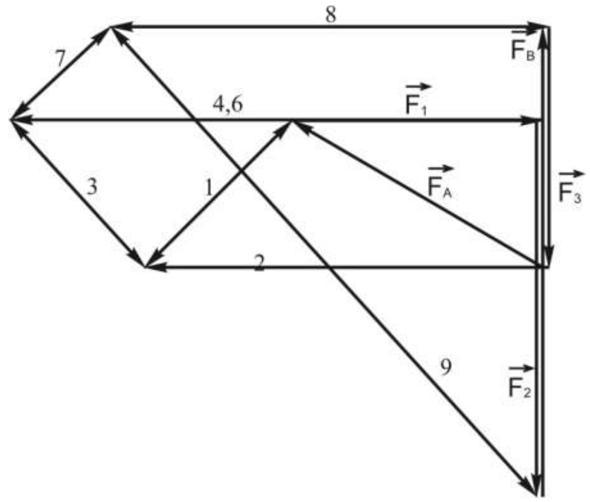
1. Konstruiše se baza od spoljašnjih sila tako što se one nanose redom kojim na njih nalazimo kada obilazimo rešetku u naznačenom smeru .

2. Konstruiše se poligon za prvi čvor, odabere se onaj čvor u kome se seku 2 štapa (A ili B). Smer obilaska čvorova mora biti isti smeru obilaska rešetke.

3. Kada se odredi smer sila u štapovima (uz uslov da poligon za svaki čvor mora biti zatvoren)  onda se taj smer nacrta u plan rešetke    .

4. Primenjujući korake opisane po 2) i 3) konstruišu se poligoni za sve čvorove. Pri konstrukciji ovih poligona prethodno određenim silama u štapovima moramo promeniti smer.

Napomena: - striktno se držati reda nanošenja sila.

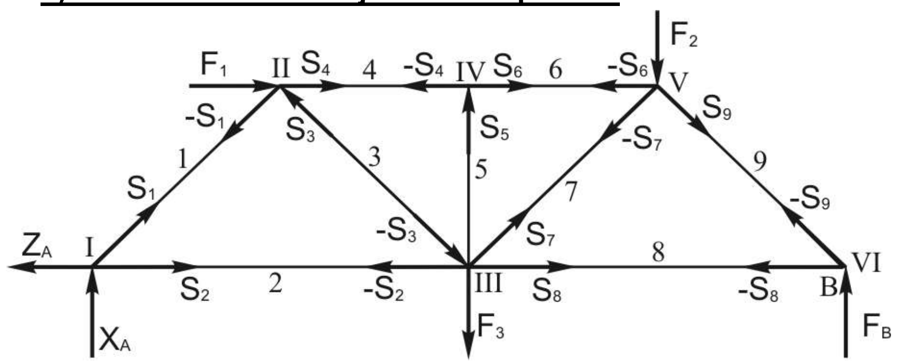



Opterećen na pritisak  Opterećen na zatezanje

| Štap (i) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sila ($S_i$) (kN) | - 3.6 | + 6.5 | +3.55 | -9.0 | 0 | -9.0 | + 2.1 | + 7.5 | - 10.6 |

Radi dimenzionisanja štapova potrebno je odrediti još jedan podatak o sili u štapu. Za silu u štapu 1 možemo reći da se opire nastojanju čvorova A i B da skrate štap 1, dok se sila u štapu 2 opire povećanju dužine štapa.

**c) analitičko određivanje sila u štapovima**




Kod analitičkog određivanja sila u štapovima posmatra se ravnoteža svakog pojedinog čvora rešetke. Dakle n (n – broj čvorova) puta postavljamo po 2 uslova ravnoteže: 1. $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$

2. $\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$

Smerove sila u štapovima pretpostavimo a prema predznaku ih usvajamo ili promenimo u suprotne.

Ravnoteža čvora I:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_2 + S_1 \cos 45^0 - Z_A = 0 \Rightarrow S_2 = 3.55kN$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S_1 \sin 45^0 + Y_A = 0 \Rightarrow S_1 = -6.5kN$$

Ravnoteža čvora I:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow F_1 + S_4 - S_1 \cos 45^0 - S_3 \cos 45^0 = 0 \Rightarrow S_4 = -9.0kN$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S_1 \sin 45^0 + S_3 \sin 45^0 = 0 \Rightarrow S_3 = -3.53kN$$

Ravnoteža čvora IV:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_4 + S_6 = 0 \Rightarrow S_4 = S_6 = -9kN$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_5 = 0$$

Ravnoteža čvora III:

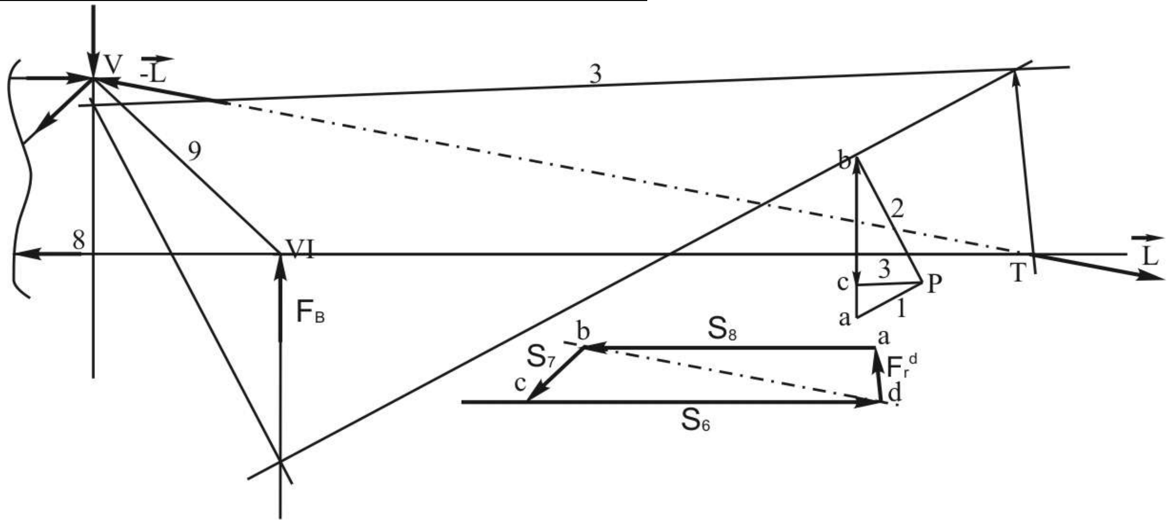
$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_2 + S_3 \cos 45^0 + S_7 \cos 45^0 + S_8 = 0 \Rightarrow S_8 = 7.5kN$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -F_3 + S_7 \sin 45^0 - S_3 \sin 45^0 = 0 \Rightarrow S_7 = 2.12kN$$

Ravnoteža čvora V:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_6 - S_7 \cos 45^0 - S_9 \cos 45^0 = 0 \Rightarrow S_9 = 10.6kN$$

## d) Određivanje sila u štapovima metodom preseka




Kulmanova metoda (grafička) - zasniva se na mogućnosti uravnoteženja jedne zadate sile sa 3 sile čiji su pravci delovanja poznati a veličinu i smer im treba odrediti. Produže se pravci traženih i zadate sile dok se po 2 od njih ne preseku (tačke T i V ) na pravcu koji prolazi kroz ove tačke dodaje se nula sila $\left(\vec{L},-\vec{L}\right)$. Dobili smo 2 sučeljna sistema sila koji moraju biti u ravnoteži. Konstrukcijom 2 zatvorena trougla sila rešava se problem.

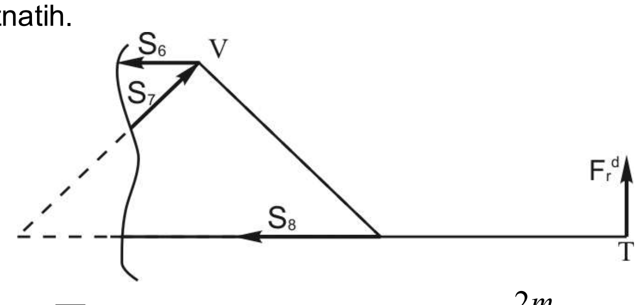
$$S_6 = -\overline{cd} \cdot U_F = -4.5cm \cdot \frac{2kN}{1cm} = -9kN$$

$$S_7 = +\overline{bc} \cdot U_F = +2.05kN$$

$$S_8 = +\overline{ab} \cdot U_F = 7.4kN$$

**Riterova metoda (grafoanalitička metoda)**

Riterova metoda zasniva se na mogućnosti određivanja ravnoteže ravne figure pomoću triju momentnih jednačina. U principu se odabiraju tačke u kojima se seku pravci delovanja sila u štapovima (ose štapova) jer se tako dobijaju momentne jednačine sa najmanjim brojem nepoznatih.




1. $\sum M_V = 0 \Rightarrow -S_8 \cdot 2 + F_{rd} \cdot 15.5cm \cdot \frac{2m}{3cm} = 0 \Rightarrow S_8 = 7.75kN$

2. $\sum M_{III} = 0 \Rightarrow S_6 \cdot 2 + F_{rd} \cdot 18.5cm \cdot \frac{2m}{3cm} = 0 \Rightarrow S_6 = -9.25kN$

3. $\sum M_T = 0 \Rightarrow S_6 \cdot 2 + S_7 \cdot 12cm \cdot \frac{2m}{3cm} = 0 \Rightarrow S_7 = -2.3kN$

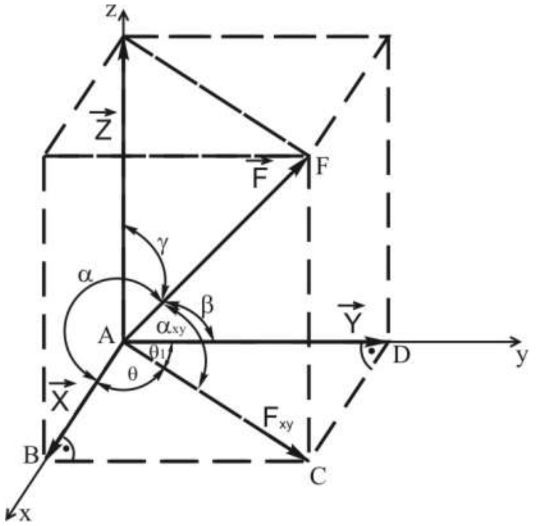
Dobijeni rezultati govore da je smer sile $\vec{S}_8$ dobro pretpostavljen dok sila $\vec{S}_6$ i $\vec{S}_7$ deluju u smeru suprotnom od pretpostavljenog.

# STATIKA U PROSTORU

**Redukcija sučeljnog sistema sila u prostoru**

Sučeljni sistem prostornih sila reducira se na isti način kao i sučeljni sistem u ravni. Svaku silu sistema treba rastaviti na komponente u pravcu osa x, y i z. Ovim se zadati sistem transformiše u tri kolinearna sistema. Pošto se odrede rezultante ovih kolinearnih sistema njihovim geometrijskim sabiranjem odredi se rezultanta zadatog sistema. Zadata sila $\vec{F}$ - prostorna rastavlja se na komponente dvostrukom primenom pravila o paralelogramu sila:

- prvo se konstruiše paralelogram ACFA i sila $\vec{F}$ se rastavi na komponente $\vec{Z}$ i $\vec{F}_{xy}$
- konstrukcojom paralograma ABCD sila $\vec{F}_{xy}$ se rastavlja na komponente $\vec{X}$ i $\vec{Y}$.




$$Z = F\cos\gamma$$
$$F_{xy} = F\cos\alpha_{xy}$$
$$Y = F_{xy}\cos\theta = F\cos\alpha_{xy}\cos\theta$$
$$X = F_{xy}\cos\theta_1 = F\cos\alpha_{xy}\cos\theta_1$$
$$\Delta ACF \Rightarrow \cos\alpha_{xy} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$$
$$\Delta ADC \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}, \Delta ABC \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$
$$\cos\alpha_{xy}\cdot\cos\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \cos\alpha$$
$$\cos\alpha_{xy}\cdot\cos\theta_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \cos\beta$$

Projekcije sile $\vec{F}$ na koordinatne ose:

$X = F\cos\alpha$, $Y = F\cos\beta$, $Z = F\cos\gamma$

Projekcije se mogu izraziti preko skalarnog proizvoda:

$X = \vec{F}\cdot\vec{i}$, $\quad Y = \vec{F}\cdot\vec{j} \quad Z = \vec{F}\cdot\vec{k}$

Komponente sile bile bi:

$\vec{X} = X\vec{i} \qquad \vec{Y} = Y\vec{j} \qquad \vec{Z} = Z\vec{k}$

Sada se može zadata sila izraziti vektorski:

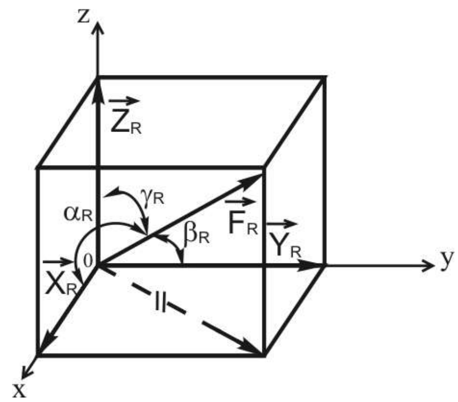
$\vec{F}_R = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Ako je zadat sistem sučeljnih prostornih $\vec{F}_i$ ( i = 1,2... n) sila $\vec{F}_R$ se određuje na sledeći način:

1) Sistem se rastavi na 3 kolinearna sistema sila po osama x, y,z (svaka sila se nadomesti komponentama)

2) izvrši se redukcija ovih kolinearnih sistema

- za sistem po osi x: $X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- za sistem po osi y: $Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i$
- za sistem po osi z: $Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i$



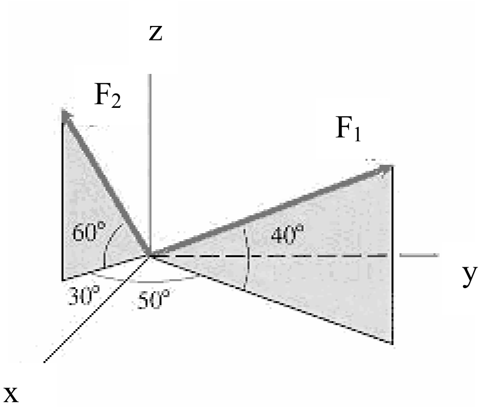

3) Dvostrukom primenom Pitagorine teoreme odredi se veličina rezultante zadatog sistema

$F_R = \sqrt{X_R^{\ 2} + Y_R^{\ 2} + Z_R^{\ 2}}$

4) Pravac i smer rezultante određuje se pomoću kosinusa pravaca

$\cos\alpha_R = \dfrac{X_R}{F_R} \qquad \cos\beta_R = \dfrac{Y_R}{F_R} \qquad \cos\gamma_R = \dfrac{Z_R}{F_R}$

Primer: Napiši rezultantu sila $F_1$= 600 N i $F_2$ = 400 N u vektorskoj formi i odredi joj intenzitet .




$$X_R = X_1 + X_2 = F_1 \cos 40^0 \cos 50^0 + F_2 \cos 60^0 \cos 30^0$$
$$X_R = 295.44 + 173.2 = 468.64N$$

$$Y_R = Y_1 + Y_2 = F_1 \cos 40^0 \sin 50^0 - F_2 \cos 60^0 \sin 30^0$$
$$Y_R \approx 352 - 100 \approx 252N$$

$$Z_R = Z_1 + Z_2 = F_1 \sin 40^0 + F_2 \sin 60^0$$
$$= 385.67 + 346.31 = 732N$$

$$\vec{F}_R = 468.64\vec{i} + 252\vec{j} + 732\vec{k}$$

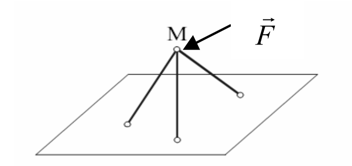
Intenzitet rezultante:

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} = ...... \approx 905N$$

**Ravnoteža čestice u prostoru**

Problem određivanja ravnoteže čestice u prostoru uglavnom se rešava analitički.

Sila $\vec{F}$ predstavlja rezultantu aktivnog sistema sučeljnih prostornih sila. Čestica u prostoru ima tri stepena slobode kretanja pa je treba vezati po tri pravca koja ne leže u istoj ravni.




Vezivanje čestice u prostori

Čestica se postavlja u koordinatni početak, ona se pod dejstvom sile $\vec{F}$ može kretati u smeru koordinatnih osa x, y i z ali je u tome sprečavaju reakcije veza.

Zato treba biti ispunjeno:

1. $X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$;

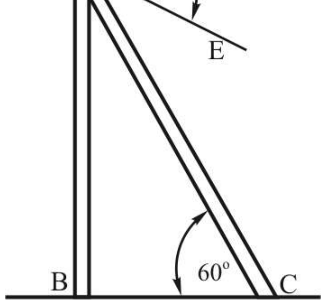
2. $Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$;

3. $Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$.

Sume projekcija svih sila koje deluju na česticu, na ose x,y,z, moraju biti jednake nuli što znači da je čestica u ravnoteži - analitički uslovi ravnoteže čestice u prostoru.

U ovim izrazima mogu biti samo tri nepoznate veličine najčešće su to veličine reakcija. Smerovi reakcija su proizvoljno ucrtani. Ako se veličine reakcija dobiju sa negativnim predznakom to znači da je smer reakcije suprotan.

**Primer 1** Horizontalni provodnici telegrafske linije vezani su u tački A za vertikalni stub CAB koji se sastoji od vertikalne grede AB i kosnika AC. Kosnik je nagnut prema horizontali pod uglom od 60°C. Ugao DAE između provodnika AD i AE jednak je 90° a odgovarajuće sile u njima jednake su 120N odnosno 160N. Odrediti ugao između ravni BAC i BAE i silu u kosniku. Težinu grede i kosnika zanemariti.



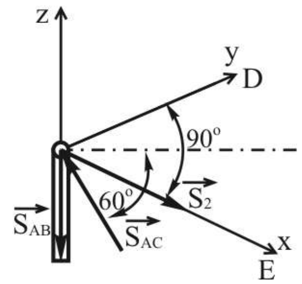

Uslovi ravnoteže:

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow S_2 - S_{AC} \cos 60^0 \cos \alpha = 0$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_1 - S_{AC} \cos 60^0 \cos(90^0 - \alpha) = 0$

3. $\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_{AB} + S_{AC} \cos 30^0 = 0$

$$1.\ \sum X_i = 0 \Rightarrow 160 - S_{AC}\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow S_{AC} = \frac{320}{\cos\alpha}$$




$$2.\ \sum Y_i = 0 \Rightarrow 120 - S_{AC}\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha = 0$$

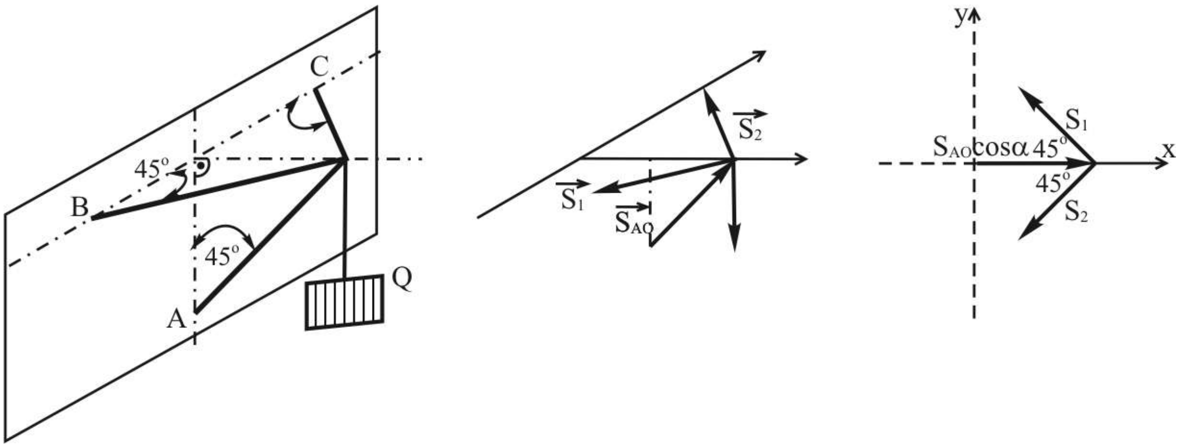
$$3.\ \sum Z_i = 0 \Rightarrow S_{AB} + S_{AC}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$2. \Rightarrow 240 - \frac{320}{\cos\alpha}\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36^0 50'$$

$$1. \Rightarrow S_{AC} = 400N$$

$$3. \Rightarrow S_{AB} = -200\sqrt{3}N$$

**<u>Primer 2.</u>** Štap OA vezan je u tački A zglobno za vertikalni zid, a tačku O pridržavaju 2 horizontalno zategnuta užeta BO i CO jednake dužine. Ugao CBO = < BCO = 45°. Štap zaklapa sa vertikalom ugao od 45°. Za čvor O obešen je teret Q = 1000 N. Odrediti veličinu sile u štapu i veličine sila u užadima.




Uslovi ravnoteže:

$$1.\ \sum X_i = 0 \Rightarrow S_{AO}\cos 45^0 - S_1\cos 45^0 - S_2\cos 45^0 = 0$$

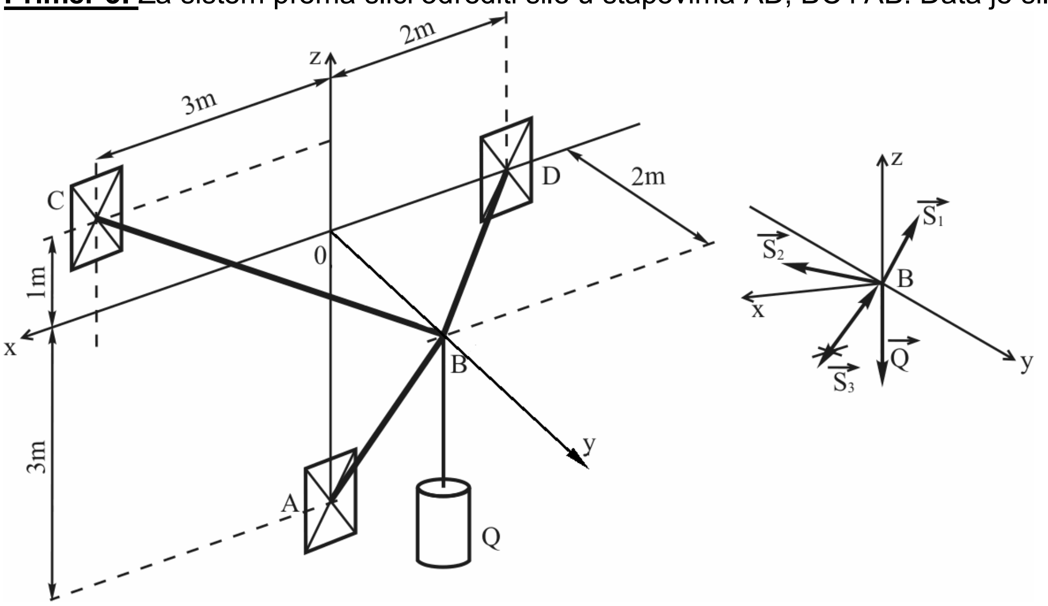
$$2.\ \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_1\sin 45^0 - S_2\sin 45^0 = 0 \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$3.\ \sum Z_i = 0 \Rightarrow S_{AO}\sin 45^0 - Q = 0$$

$$3. \Rightarrow S_{AO} = 1000\sqrt{2}N$$

$$1. \Rightarrow S_1 = S_2 = 500\sqrt{2}N$$

**<u>Primer 3.</u>** Za sistem prema slici odrediti sile u štapovima AD, BC i AB. Data je sila Q=30kN.



Rešenje:
Predpostavljeno je da su štapovi opterećeni na zatezanje.

$\vec{S}_1$ - sila u ravni xOy; $\vec{S}_1(S_{1x}, S_{1y}, 0)$; $\vec{S}_1\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}S_1, -\frac{2}{2\sqrt{2}}S_1, 0\right)$

$\vec{S}_2$ - sila u ravni yOz; $\vec{S}_3(0, S_{3y}, S_{3z})$; $\vec{S}_3\left(0, -\frac{2}{\sqrt{13}}S_3, -\frac{3}{\sqrt{13}}S_3\right)$

Pravac i smer prostorne sile $\vec{S}_2(S_2\cos\alpha, S_2\cos\beta, S_2\cos\gamma)$ u dekartovom koordinatnom sistemu:
koordinate tačaka: $B(0,2,0)$; $C(3,0,1)$, dužina štapa BC:

$$B\overline{C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}m$$

1

$$\cos\alpha = \frac{x_C - x_B}{B\overline{C}} = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad \cos\beta = \frac{y_C - y_B}{B\overline{C}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}; \quad \cos\gamma = \frac{z_C - z_B}{BC} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{S}_2\left(\frac{3}{\sqrt{14}}S_2, -\frac{2}{\sqrt{14}}S_2, \frac{1}{\sqrt{14}}S_2\right)$$

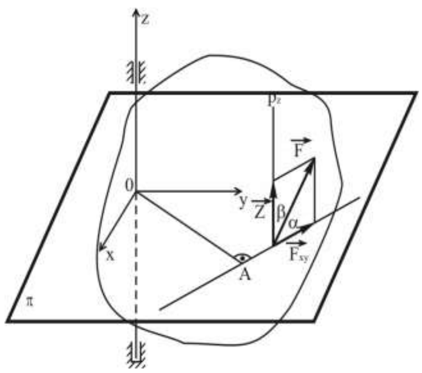
Jednačine ravnoteže (sučeljni sistem sila u prostoru):

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow S_{1x} + S_{1y} = 0$ 2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} = 0$ 3. $\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_{2z} + S_{3z} - Q = 0$

Rešenja sistema od 3 jednačine sa 3 nepoznate su:
$S_1$=14.95kN, $S_2$=13.21kN $S_3$=-31.81kN- štap AB opterećen je na pritisak.

## OPŠTI SLUČAJ PROSTORNOG SISTEMA SILA

### Definicija statičkog momenta sile za osu




Statički moment sile za tačku je moment sile za osu koja je upravna na ravan delovanja sile i prolazi kroz tu tačku. U opštem slučaju kada osa nije upravna na ravan delovanja sile njen se moment za tu osu određuje prema prikazu na slici.

Sila $\vec{F}$ rastavljena je, prema zakonu o paralelogramu sila na komponente $\vec{Z}$ i $\vec{F}_{xy}$. Očigledno je da sila $\vec{F}_{xy}$ ima moment za osu z odnosno za tačku O i on iznosi:

$$M_z = O\overline{A} \cdot F_{xy} \qquad (O\overline{A} = h)$$

$$F_{xy} = F \cdot \cos\alpha$$

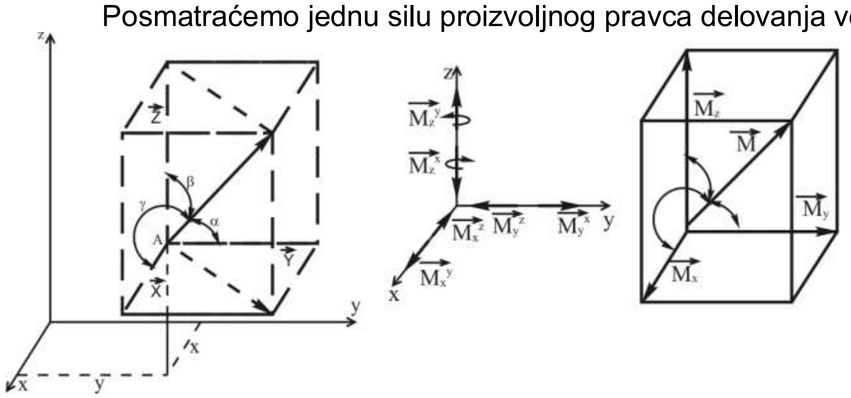
$M_z = h \cdot F \cdot \cos\alpha$ - veličina momenta

Sila $\vec{Z}$ nema moment za osu z već za neku osu koja je upravna na ravan određenu osom z i pravcem $p_z$.
Statički moment sile za osu z jednak je momentu komponente, zadate sile, koja leži u ravni upravnoj na osu z i čija se veličina određuje projektovanjem sile paralelno osi z.

Smer momenta sile za osu određuje se po pravilu desne ruke.

Sila nema moment za osu u slučaju kada je ona paralelna osi ili da svojim pravcem prolazi kroz (seče) osu.

Posmatraćemo jednu silu proizvoljnog pravca delovanja veličine i smera - sila $\vec{F}$.



Sila $\vec{F}$ rastavlja se na komponente u lokalnom koordinatnom sistemu čije su veličine:

$X = F\cos\alpha$ , $\quad$ $Y = F\cos\beta$ , $\quad$ $Z = F\cos\gamma$

Sada po definiciji momenta sile za osu možemo pisati:

$$M_z^{\vec{F}} = M_z^{\vec{F}_{xy}} = M_z^{\vec{X}} + M_z^{\vec{Y}}$$

Poslednja jednakost je dobijena na osnovu Varinjonove teoreme

$$M_z^{\vec{X}} = -y \cdot X \quad ; \qquad M_z^{\vec{Y}} = x \cdot Y$$

$$M_z^{\vec{F}} = M_z^{\vec{X}} + M_z^{\vec{Y}} = x \cdot Y - y \cdot X$$

Analogno ovome računaju se momenti za preostale ose

$$M_x^{\vec{F}} = M_x^{\vec{F}_{zy}} = M_x^{\vec{Z}} + M_x^{\vec{Y}} = y \cdot Z - z \cdot Y$$

$$M_y^{\vec{F}} = M_y^{\vec{F}_{xz}} = M_y^{\vec{X}} + M_y^{\vec{Z}} = zX - xZ$$

$\vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z$ - rezultantni spreg

$M = \sqrt{M_x^{\,2} + M_y^{\,2} + M_z^{\,2}}$ - veličina momenta rezultantnog sprega

Ove formule se mogu primeniti za izračunavanje momenta sile za koordinatne ose ako su poznate projekcije sile na te ose i koordinate njene napadne tačke.

Na osnovu definicije momenta sile za tačku kao vektorske veličine imamo:

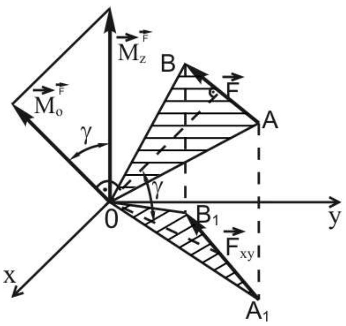
$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \times \left(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(yZ - zY\right)\vec{i} + \left(zX - xZ\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(xY - yX\right)\vec{k} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$M_x = yZ - zY \quad ; \qquad M_y = zX - xZ \quad ; \qquad M_z = xY - yX$$

što se poklapa sa analitičkim izrazima momenata za koordinatne ose.

Dakle, momenat sile za osu, koja prolazi kroz posmatranu tačku jednak je projekciji vektora momenta sile za tačku a na tu osu.




$$M_O^{\vec{F}} = 2 \cdot P_{\Delta OAB}$$

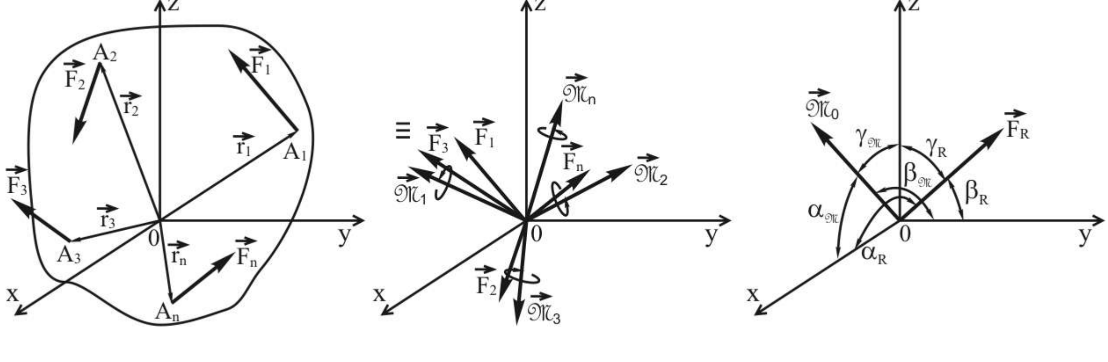
$$M_z^{\vec{F}} = 2 \cdot P_{\Delta OA_1B_1}$$

$$P_{\Delta OA_1B_1} = P_{\Delta OAB} \cdot \cos\gamma$$

$$2P_{\Delta OA_1B_1} = 2P_{\Delta OAB} \cdot \cos\gamma \Rightarrow M_z^{\vec{F}} = M_O^{\vec{F}} \cdot \cos\gamma$$

## <u>Svođenje opšteg slučaja prostornog sistema sila</u>

Kod svo]enja opšteg slučaja prostornog sistema sila zadate sile paralelno se pomiču dok im početci ne dođu u koordinatni početak. Ovako se zadati sistem transformiše u sučeljni sistem prostornih sila ali se u razmatranje moraju uzeti i redukcioni spregovi koji su prostorno raspoređeni.



Geometrijski zbir sučeljnih sila je glavni vektor sistema sila:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + .........+ \vec{F}_n$$

Primenjujući pravilo projekcija možemo pisati :

$$X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i \,; \qquad Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i \,; \qquad Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

- Veličina rezultante sistema:

$$F_R = \sqrt{X_R^{\,2} + Y_R^{\,2} + Z_R^{\,2}}$$

- smer rezultante:

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R}{F_R}; \;\; \cos\beta_R = \frac{Y_R}{F_R}; \;\; \cos\gamma_R = \frac{Z_R}{F_R} \text{..................(1)}$$

Spregove redukcije, koji su u ovom slučaju prostorno raspoređeni vektorski sabiramo i dobijamo glavni moment sistema sila

$$\vec{\mathrm{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{M}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Primenom pravila projektovanja:

$$\mathrm{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}^{\vec{F}_i} \,; \quad \mathrm{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}^{\vec{F}_i} \,; \quad \mathrm{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}^{\vec{F}_i}$$

- Veličina momenta rezultantnog sprega:

$$\mathrm{M}_o = \sqrt{\mathrm{M}_{Ox}^{\,2} + \mathrm{M}_{Oy}^{\,2} + \mathrm{M}_{Oz}^{\,2}} = \sqrt{\left(\sum M_{Ox}^{\vec{F}_i}\right)^2 + \left(\sum M_{Oy}^{\vec{F}_i}\right)^2 + \left(\sum M_{Oz}^{\vec{F}_i}\right)^2}$$

a smer i pravac delovanja:

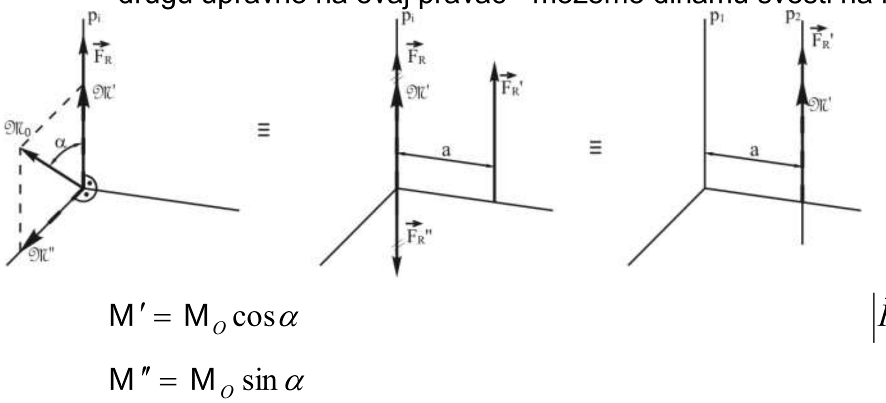
$$\cos\alpha_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}_{Ox}}{\mathrm{M}_O}; \quad \cos\beta_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}_{Oy}}{\mathrm{M}_O}; \quad \cos\gamma_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}_{Oz}}{\mathrm{M}_O} \text{............(2)}$$

Izrazi (1) i (2) određuju rezultantu i rezultantni redukcioni spreg. Ove 2 veličine nazivaju se vektori diname. Za njih veži sledeće:

- veličina i smer rezultante ne zavise od izbora tačke za koordinatni početak
- veličina i smer rezultantnog redukcionog sprega zavisi od izbora tačke za koordinatni početak.

Pravci vektora diname za opšti slučaj prostornog sistema mogu zaklapati bilo koji ugao. Ako vektor momenta redukcionog sprega rastavimo na 2 komponente:

- jednu na pravcu delovanja rezultante,
- drugu upravno na ovaj pravac - možemo dinamu svesti na najjednostavniji oblik.




$$\mathrm{M}' = \mathrm{M}_O \cos\alpha \qquad\qquad \left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_R{}'\right| = \left|\vec{F}_R{}''\right|$$

$$\mathrm{M}'' = \mathrm{M}_O \sin\alpha$$

Vektor $\mathrm{M}''$ možemo zameniti parom sila $\left(\vec{F}_R{}', \vec{F}_R{}''\right)$ i izraziti kao:

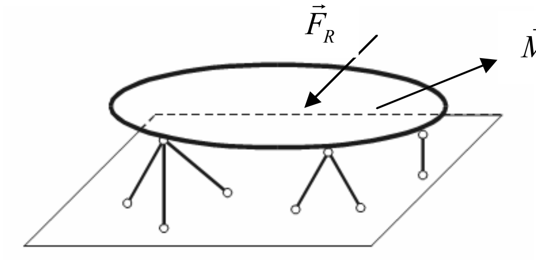
$$\mathrm{M}'' = F \cdot a \Rightarrow a = \frac{\mathrm{M}''}{F_R} = \frac{\mathrm{M}_O \sin\alpha}{F_R}$$

što daje mogućnost da paralelno pomaknemo rezultantu za krak $a$ tako da dođe na pravac $p_2$.

Dalje, pojednostavljenje nije moguće $\rightarrow$ opšti slučaj prostornog sistema ne može se reducirati u opštem slučaju na jednu silu već na dinamu. Pravac $p_2$ se naziva osa diname.

## Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila

Proizvoljni prostorni sistem sila se redukcijom na tačku može svesti na glavni vektor i glavni moment (spreg). S obzirom na aktivni sistem sila prostorno kruto telo imalo bi šest stepeni slobode kretanja ali reakcije veza poništavaju delovanje aktivnog sistema. Zato se za posmatrani slučaj može postaviti šest uslova ravnoteže:




Vezivanje tela u prostoru

1. $X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ 2. $Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$ 3. $Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$

4. $\sum_{i=1}^{n} M_x^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$ 5. $\sum_{i=1}^{n} M_y^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$

6. $\sum_{i=1}^{n} M_z^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$

Prve 3 j-ne su komponentne. One određuju da sume projekcija aktivnih sila i reakcija vezana na ose x, y i z moraju biti jednake nuli - što znači da telo ne može vršiti translatorne pomake u smeru ovih osa. Zadnja tri izraza su momentne j-ne kojima se određuje da sume statičkih momenata aktivnih sila i reakcija veza moraju biti jednaki nuli. Ovi uslovi isključuju mogućnost rotiranja oko osa x,y i z ili njima paralelnih osa.

Ako na telo pored sila deluju i spregovi $(\vec{M}_1, \vec{M}_2 \ldots\ldots \vec{M}_n)$ onda se glavni moment dobija slaganjem redukcionih i aktivnih spregova:

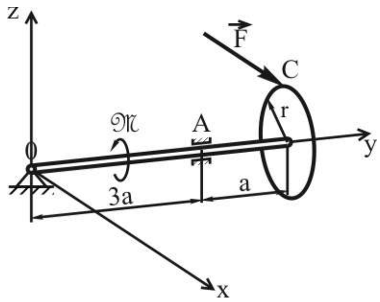
$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$, pa zadnja tri uslova ravnoteže dobijaju oblik:

4. $\sum_{i=1}^{n} M_x^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0$

5. $\sum_{i=1}^{n} M_y^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0$ 6. $\sum_{i=1}^{n} M_z^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$

Zadnja tri izraza određuju da sume statičkih momenata aktivnih sila i reakcija veza kao i momenata aktivnih spregova moraju biti jednaki nuli.

**Primer 1**. Odrediti reakcije ležišta O (sfernog) i A (cilindričnog) kao i veličinu M sprega, koji deluje na vratilo, ako u tački C zupčanika B, poluprečnika r, koji je nasađen na kraju prepusta vratila OA, deluje sila $\vec{F}$, pri čemu je je $\alpha = 60^0, \gamma = 240^0$ i $Y \succ 0$. Tražene veličine izračunati za slučaj kada je: $|\vec{F}| = 10kN$, $r = 0.15m$ i $a = 0.3m$.




Rešenje:

$\alpha = 60^0, \gamma = 240^0$ i $Y \succ 0$

Prostorna sila $\vec{F}(X,Y,Z)$ tj $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ zapisana preko svojih komponenti.

$X = F\cos\alpha = F/2 = 5kN$, $Y = F\cos\beta$,

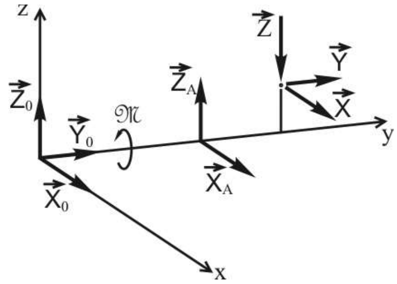
$Z = F\cos\gamma = F \cdot \cos 240^0 = F \cdot (-1/2) = -F/2 = -5kN$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\beta \succ 0 \Rightarrow Y \succ 0 \qquad Y = F\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}kN$$

Telo oslobođeno od veza, koje su zamenjene reakcijama veza.

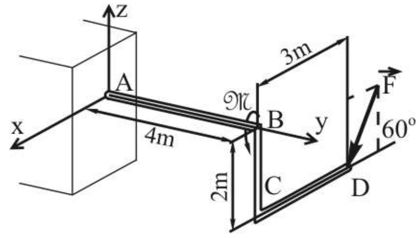
Jednačine ravnoteže:



1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow X_0 + X_A + X = 0 \Rightarrow X_0 = 1.66kN$
2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_0 + Y = 0 \Rightarrow Y_0 = -Y = -5\sqrt{2}kN$
3. $\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_0 + Z_A - Z = 0 \Rightarrow Z_0 = -2.85kN$
4. $\sum M_x = 0 \Rightarrow Z_A \cdot 3a - Y \cdot r - Z \cdot 4a = 0 \Rightarrow Z_A = 7.85kN$
5. $\sum M_y = 0 \Rightarrow -\mathrm{M} + X \cdot r = 0 \Rightarrow \mathrm{M} = 5 \cdot 0.15 = 0.75kNm$
6. $\sum M_z = 0 \Rightarrow -X_A \cdot 3a - X \cdot 4a = 0 \Rightarrow X_A = -6.66kN$

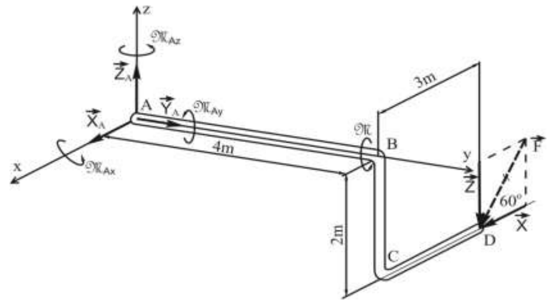
**Napomena:** svim silama ispred čije je brojne vrednosti dobijen predznak - treba promeniti smer.

__Primer 2.__ Prostorni linijski nosač ABCD zanemarljive težine uklješten je u tački A i opterećen silim F=4kN u tački D, koja leži u ravni paralelnoj sa xAz i momentom uvijanja M=6kNm (oko ose y) u tački B , prema slici. Odrediti reakcije veze u uklještenju A.




Rešenje: Rastavljamo kosu aktivnu silu na komponente $\vec{F} = X\vec{i} + 0\vec{j} + Z\vec{k}$, pri čemu je $X = F\cos 60^0 = 2kN$ ; $Z = -F\sin 60^0 = -2\sqrt{3}kN$

Umesto uklještenja u prostoru postavljene su tri komponente sile reakcije i 3 komponente momenta uklještenja →6 nepoznatih veličina.



Iz jednačina ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila dobija se:

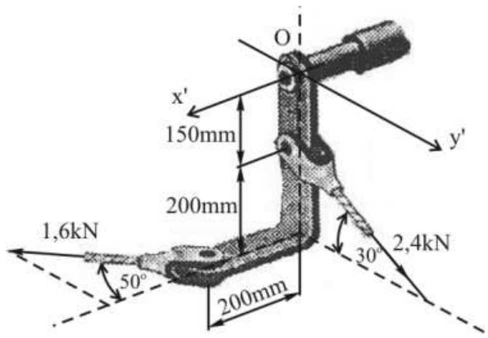
1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + X = 0 \Rightarrow X_A = -X = -2kN$

   $\left(\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = 0\right)$
2. $\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - Z = 0 \Rightarrow Z_A = Z = 2\sqrt{3}kN$
3. $\sum M_x = 0 \Rightarrow$ $M_{Ax} - Z \cdot 4 = 0 \Rightarrow$

   $M_{Ax} = 8\sqrt{3}kNm$
4. $\sum M_y = 0 \Rightarrow$ $M_{Ay} + M - X \cdot 2 - Z \cdot 3 = 0 \Rightarrow$ $M_{Ay} = -8.39kNm$
5. $\sum M_z = 0 \Rightarrow$ $M_{Az} - X \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ $M_{Az} = 8kNm$

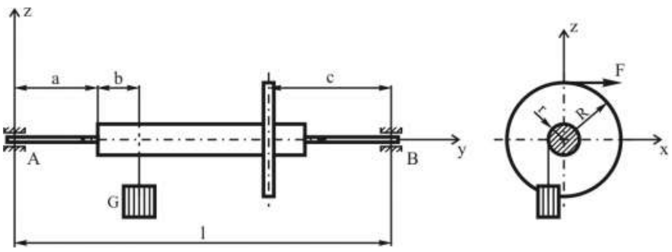
__Primer 3.__ Naći komponente glavnog vektora za zglob O i komponente momenata za zglob O.

$$F_x = 1{,}6 \cdot \cos 50° = 1{,}03kN$$
$$F_y = 2{,}4 \cdot \cos 30° - 1{,}6 \cdot \sin 50° = 0{,}85kN$$
$$F_z = -2{,}4 \cdot \sin 30° = -1{,}2kN$$
$$M_x' = -1{,}6 \cdot \sin 50° \cdot 0{,}35 + 2{,}4\cos 30° \cdot 0{,}15 = 0{,}117kNm$$
$$M_y' = -1{,}6 \cdot \cos 50° \cdot 0{,}35 = -0{,}36kNm$$
$$M_z' = -1{,}6 \cdot \sin 50° \cdot 0{,}2 = -0{,}245kNm$$

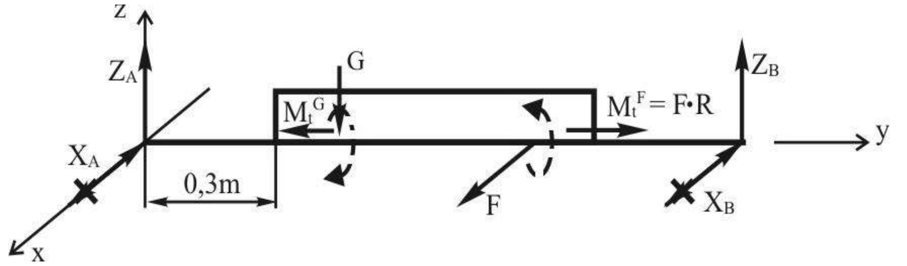



__Primer 4.__ Horizontalnom silom F na obodu točka vitla održava se ravnoteža teretu G čiji je intenzitet 3kN koji se podiže pomoću bubnja koji je postavljen na sredini vitla. Dužina bubnja je 60cm i težina 600N. Težine vratila i točka zanemariti.

Za poznate dužine: a=30cm, b=20cm, c=40cm, l=120cm i poluprečnik r=5cm i R=25cm:




a) odrediti intenzitet sile F i otpore ležišta A i B
b) prikazati opterećenja vratila u vertikalnoj ravni u skicirati i kotirati dijagrame $F_T$ i $M_s$




Jednačine ravnoteže:

$$1.\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + X_B + F = 0$$

$$2.\sum Y_i = 0$$

$$3.\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - G - G_b + Z_B =$$

$$4.\sum M_x = 0 \Rightarrow -G \cdot 0{,}5 - G_b \cdot 0{,}6 + Z_B \cdot 1{,}2 = 0$$

$$5.\sum M_y = 0 \Rightarrow -G \cdot r + F \cdot R = 0$$

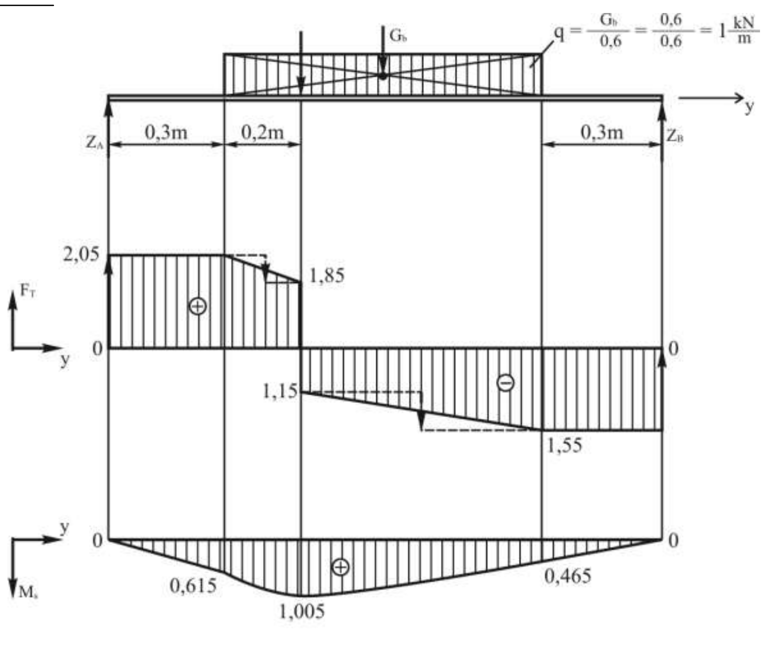
$$6.\sum M_z = 0 \Rightarrow -F \cdot 0{,}8 - X_B \cdot 1{,}2 = 0$$

$$5. \Rightarrow F = \frac{G \cdot r}{R} = \frac{3 \cdot 0{,}05}{0{,}25} = 0{,}6KN \qquad 6. \Rightarrow X_B = \frac{-F \cdot 0{,}8}{1{,}2} = \frac{-0{,}6 \cdot 0{,}8}{1{,}2} = -0{,}4kN$$

$$4. \Rightarrow Z_B = \frac{3 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}6}{1{,}2} = 1{,}55kN \qquad 3. \Rightarrow Z_A = G + G_d - Z_B = 3 + 0{,}6 - 1{,}55 = \underline{2{,}05kN}$$

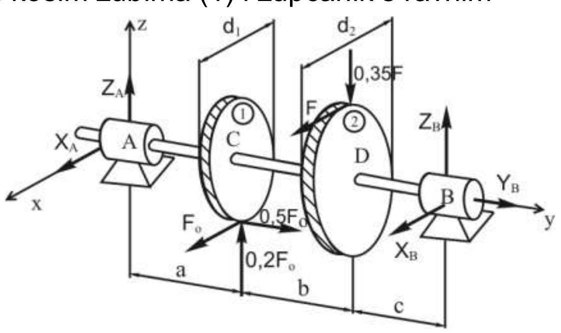
$$1. \Rightarrow X_A = -X_B - F = -(-0{,}4) - 3 = \underline{2{,}6kN}$$

Statički dijagram u vertikalnoj ravni:




Mmax (=Mx)=1,005kNm

**Primer 5.** Na vratilo reduktora učvršćeni su zupčanik s kosim zubima (1) i zupčanik s ravnim zubima (2) prema slici. Odrediti obimnu silu $F_o$ na zupčaniku (1) i reakcije u ležajevima A i B. Ležaj A je radijalni a ležaj B je radijalno-aksijalni. Dato je : F=10kN, a=0.5m, b=0.35m, c=0.25m, $d_1$=0.1m, $d_2$=0.15m.




Rešenje: Reakcije u ležajevima:

$F_O = 15kN$ | $F_A = 10.48kN$ | $X_B = -14.545kN$
$X_A = -10.45kN$ | $F_B = 14.77kN$ | $Y_B = -2.25kN$
$Z_A = -0.74kN$ | | $Z_B = 1.24kN$

Na slici su vidljivi predpostavljeni smerovi sila reakcija veza a veličine komponenti reakcija veza su izračunate iz jednačina ravnoteže. Svim komponentama sa znakom - treba promeniti smer.

# TRENJE

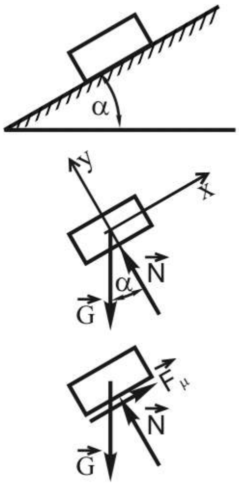
U dosadašnjim razmatranjima ravnoteže zamenjivali smo realna tela modelima koji su bili:

- apsolutno kruti
- idealno glatkih površina

tako da smo njihove dodirne veze zamenjivali reakcijama normalnim na zajedničku tangencijalnu ravan u tački dodira. U stvarnosti kod dodirne veze pojavljuje se tangencijalna reakcija koja se uvek protivi kretanju i naziva se otpor trenja kretanju a same veze nazivamo veze sa trenjem (realne veze). Većina pojava trenja može se opisati pomoću dve osnovne vrste trenja:

- trenje klizanja
- trenje kotrljanja.

**Trenje klizanja**




Posmatrajmo prizmatično telo težine G na strmoj ravni koje se nalazi u stanju mirovanja. Ako se držimo pretpostavki o apsolutnoj krutosti tela i idealnoj glatkoći dodirnih površina imamo sledeću situaciju:

$\sum X_i \neq 0 \Rightarrow G\sin\alpha \neq 0$ ako je $\alpha \neq 0$ uslov ravnoteže po osi x nije zadovoljen.

Tvrdnju da se telo nalazi u stanju mirovanja na strmoj ravni iskustvo potvrđuje i objašnjava postojanjem trenja klizanja kojim strma ravan deluje na prizmatično telo:

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow F_\mu - G\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_\mu = G\sin\alpha$
2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - G\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = G\cos\alpha$

**Sila trenja**

Pojava trenja je složen proces i zadire u veoma složenu atomsku strukturu materije. Zato nije moguće otpor trenja predvideti odnosno uticaj svih činilaca obuhvatiti nekim matematičkim obrascem. Kulon je definisao model pomoću koga se sa dovoljnom tačnošću rešavaju problemi sa trenjem. Eksperimentalne rezultate svojih istraživanja objavio je u obliku sledećih zakona:

1. Ukupni otpor trenja je sila trenja koja ima:

- pravac kretanja (brzine) u tangencijalnoj ravni dodira tela, koji se ostvaruje ili koji se nastoji ostvariti a smer suprotan smeru kretanja. Ona je po pravcu i intenzitetu jednaka rezultanti aktivnih sila u ravni dodira a suprotnog je smera od nje.

2. Veličina sile trenja ne zavisi od veličine dodirnih površina već od vrste materijala i kvaliteta obrade dodirnih površina.

3. Veličina sile trenja upravo je proporcionalna veličini normalne reakcije podloge a faktor proporcionalnosti je koeficijent trenja pri klizanju. Veličina sile trenja određuje se sledećim izrazom:

$$F_\mu = \mu \cdot N$$

gde je:

$N$ - normalna reakcija

$F_\mu$ - sila trenja

$\mu$ - koeficijent trenja

stanje dodirnih površina i vrstu materijala objekata čije se kretanje posmatra obuhvata koeficijent trenja kojeg treba eksperimentalno odrediti.

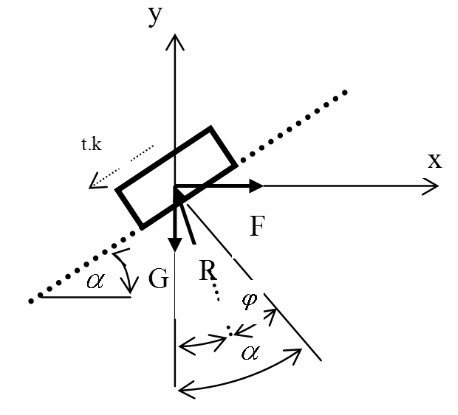
**Ravnoteža kad deluje i trenje**

Kulonovi zakoni i izraz $F_\mu = \mu \cdot N$ omogućavaju da se problemi određivanja ravnoteže kada postoji trenje rešavaju na isti način kao kada i nema trenja.

- Telo se oslobodi veza koje se nadomeste reakcijama veza - uključujući i tangenicjalnu reakciju - silu trenja
- Postave se uslovi ravnoteže u kojima je sila trenja prekobrojna nepoznata, ali problem nije statički neodređen jer dodatni uslov koji određuje silu trenja predstavlja izraz:

$$F_\mu = \mu \cdot N$$

**Trenje na strmoj ravni**
granični slučaj – neposredno pred početak kretanja niz strmu ravan
$\varphi = arctg\mu$ - ugao trenja – otklon reakcije podloge od normale na ravan podloge
$\alpha$ - ugao nagiba strme ravni




Jednačine ravnoteže tela na strmoj ravni:

$\sum X_i = 0 \Rightarrow F - R\sin(\alpha - \varphi) = 0$ ........ (1)

$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -G + R\cos(\alpha - \varphi) = 0$ ......... (2)

Iz (2) $\Rightarrow R = \dfrac{G}{\cos(\alpha - \varphi)}$

Iz (1) $\Rightarrow F = R\sin(\alpha - \varphi) = G\dfrac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}$

$$F = G \cdot tg(\alpha - \varphi)$$

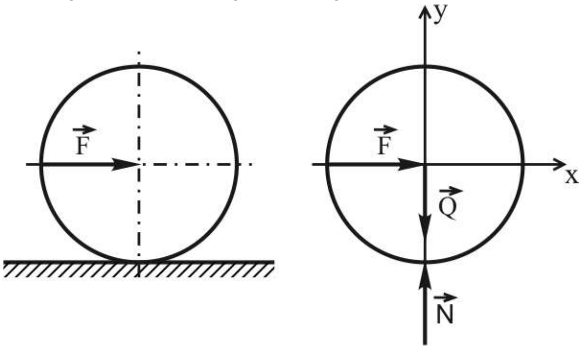
1. Za $\alpha = \varphi \Rightarrow F = 0 \rightarrow$ telo se nalazi na granici klizanja
2. Za $\alpha \prec \varphi \Rightarrow F \prec 0 \rightarrow$ za pomicanje tela niz strmu ravan potrebna je sila
3. Za $\alpha \succ \varphi \Rightarrow F \succ 0 \rightarrow$ potrebna je sila da drži telo na strmoj ravni

**Uslov samokočenja:** $\alpha \leq \varphi$

**Trenje kotrljanja**

Pojava trenja kotrljanja složenija je od pojave trenja klizanja ali se objašnjava jednostavnim i praktičnim modelom.

Opisaćemo, pojednostavljeno kotrljanje kružnog valjka po ravnoj nepomičnoj podlozi za slučaj kada na valjak deluje: - vučna sila.

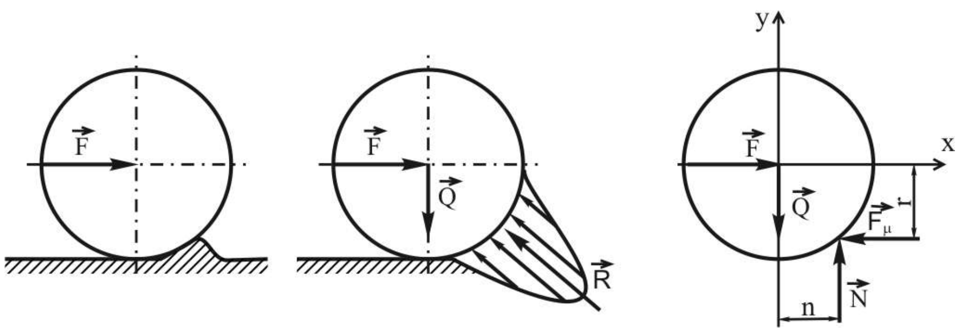



Posmatraćemo valjak na horizontalnoj podlozi. U središtu valjka deluje sila Q po pravcu vertikale čija je veličina jednaka zbiru težine valjka i korisnog opterećenja. Sila F je aktivna sila koja izaziva kretanje valjka. Neka su i valjak i podloga apsolutno kruti i idealno glatki.

Ravnoteža ne postoji po osi x; valjak se kreće translatorno i sa ubrzanjem. Da bi se objasnilo kotrljanje valjka treba napustiti pretpostavku o apsolutnoj krutosti i idealnoj glatkoći. Obično se koristi model prikazan na slici:

- valjak se smatra apsolutno krutim ali hrapavim
- podloga je deformabilna i hrapava.

Valjak deformiše podlogu i gura pred sobom jedan njen deo. Reakciju podloge, silu $\vec{R}$, shvatimo kao rezultantu pritiska kojom deformisani deo podloge deluje na valjak. U statici se proučava slučaj kada se središte valjka kreće konstantnom brzinom (ravnotežno stanje) pa pravac delovanja reakcije $\vec{R}$ mora prolaziti kroz središte valjka. Rastavimo silu $\vec{R}$ na komponente $\vec{N}$ i $\vec{F}_\mu$.



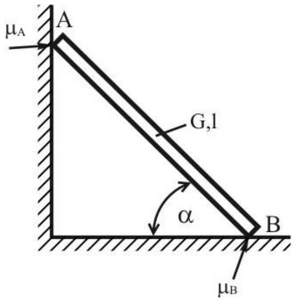

- sile $\vec{F}_\mu$ i $\vec{F}$ su u ravnoteži i formiraju spreg koji uzrokuje kotrljanje valjka
- $\vec{Q}$ i $\vec{N}$ su u ravnoteži a njihov spreg predstavlja otpor kotrljanju valjka u graničnom položaju ravnoteže ova dva sprega su jednaka:

$$F_{max} \cdot r = N \cdot k$$

$$(F_\mu)_{gr} = F_{max} = \frac{k}{r} N$$

Za $F \prec (F_\mu)_{gr}$ cilindar miruje a ako je $F \succ (F_\mu)_{gr}$ počinje kotrljanje cilindra.

Korak k se naziva koeficijent trenja kotrljanja ili krak otpora kotrljanja i meri se u cm. Veličina ovog koeficijenta zavisi od materijala tela i određuje se eksperimentalnim putem. Odnos $\frac{k}{r}$ je za većinu materijala znatno manji od koeficijenta trenja . Zato se u praksi, kad je to moguće, teži da se klizanje zameni kotrljanjem.




**Primer 1.** Homogena greda AB dužine l i težine G, oslanja se u tačkama A i B na hrapav vertikalni zid i hrapav vertikalni pod. Koeficijenti trenja su $\mu_A$=0,5 i $\mu_B$=0,4. Odrediti vrednost ugla α (ugao nagiba grede prema horizontali), pri kome greda ostaje u ravnoteži.

Jednačine ravnoteže:

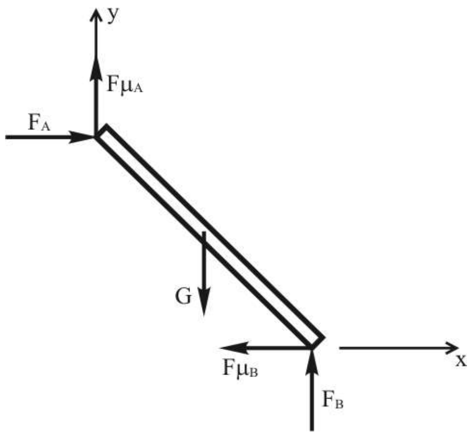
1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow F_A - F_{\mu B} = 0$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_{\mu A} + F_B - G = 0$

3. $\sum M_B = 0 \Rightarrow -F_{\mu A} \cdot l\, cos\,\alpha - F_A \cdot l\, sin\,\alpha + G \cdot \frac{l}{2} cos\,\alpha = 0$

Dopunske jednačine ravnoteže:

4. $F_{\mu B} = \mu_B \cdot F_B$ 5. $F_{\mu A} = \mu_A \cdot F_A$




Odakle dobijamo: $F_B = \frac{5}{6} G$ , $F_A = \frac{1}{3} G$ ,

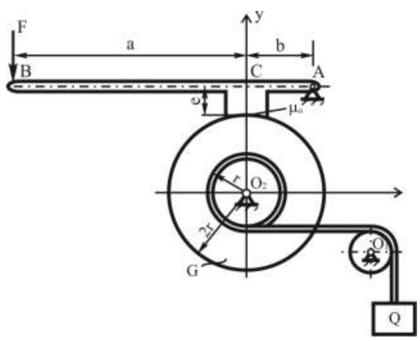
$F_{\mu A} = \frac{1}{6} G$

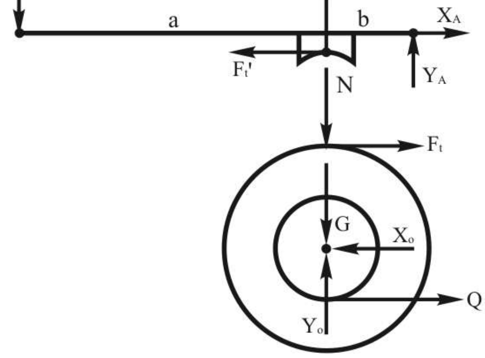
$F_{\mu B} = \frac{2}{3} G$ i $\alpha_{min} = 45°$

**Primer 2.** Pomoću kočnice sa dobošom, prikazane na slici, spušta se jednoliki teret Q naniže. Ako je sila kočenja F=5kN, odrediti veličinu tereta Q čije se kretanje može sprečiti. Kolike su reakcije veza u osloncima A, $O_1$ i $O_2$ u tom slučaju. Trenje užeta o kotur i trenje u osloncima se može zanemriti.

Zadato je:

r, G = 1kN, a = 40cm,b = 10cm, e = 6cm, $\mu_o$ = 0,25




Poluga AB

Kočioni doboš

Jednačine ravnoteže poluge:

$$1.\sum M_A = 0 \Rightarrow F \cdot (a+b) - N' \cdot b - F_t' \cdot e = 0$$

$$F \cdot 0{,}5 - N' \cdot 0{,}1 - \mu \cdot N' \cdot 0{,}06 = 0$$

$$0{,}5 \cdot F - 0{,}1 \cdot N' - 0{,}015 \cdot N' = 0$$

$$0{,}115 \cdot N' = 2{,}5 \Rightarrow N' = 21{,}74kN$$

$$F_t' = 5{,}44kN$$

$$2.\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A = 5{,}44kN$$

$$3.\sum Y_i = 0 \Rightarrow N' + Y_A - F = 0 \Rightarrow Y_A = F - N' = 5 - 21{,}74 = \underline{\underline{-16{,}74kN}}$$

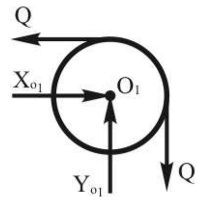
Jednačine ravnoteže kočionog doboša:

$$1.\sum M_0 = 0 \Rightarrow Q \cdot r = F_t \cdot 2r \,/ : r$$

$$Q = F_t \cdot 2 \Rightarrow Q = 2 \cdot 5{,}44 = \underline{\underline{10{,}88kN}}$$

$$2.\sum X_i = 0 \Rightarrow X_{O_2} = Q + F_t = 10{,}88 + 5{,}44 = 16{,}32kN$$

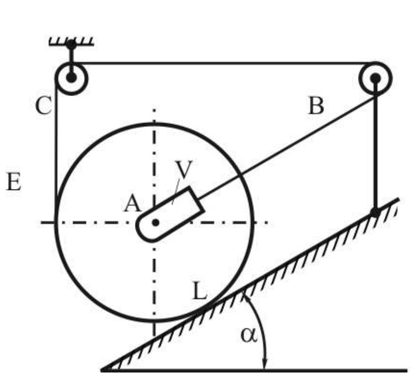
$$3.\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_{O_2} = G + N = 1 + 21{,}74 = 22{,}74kN$$

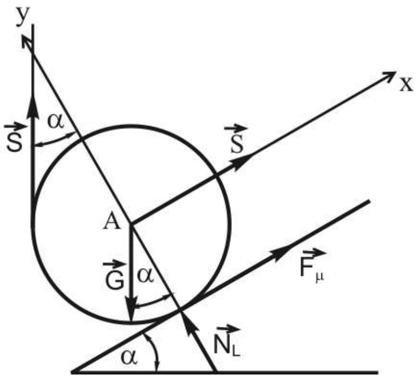



Reakcije u osloncu $O_1$:

$$X_{O_1} = Q = 10{,}88kN \qquad Y_{O_1} = Q = 10{,}88kN$$

**Primer 3.** Homogeni kružni disk težine G oslanja se u tački L na strmu hrapavu ravan nagnutu pod uglom $\alpha$ u odnosu na horizontalu. Za osovinu disku A učvršćena je dvokraka viljuška V zanemarljive težine za koju je vezano uže i prebačeno preko koturova B i C a potom pričvršćena u tački E diska. Odrediti intenzitet sile u užetu kao i vrednost koeficijenta trenja između diska i strme ravni. Trenje između užeta i koturova zanemariti a disk i podlogu smatrati apsolutno krutim telima.




Uže je mašinski elemenat koji menja pravac sile koju prenosi, ako se zanemari trenje između užeta i koturova, veličina sile ostaje nepromenjena.

Uslovi ravnoteže:

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow S + F_\mu - G\sin\alpha + S\sin\alpha = 0$
2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_L - G\cos\alpha + S\cos\alpha = 0$
3. $\sum M_A = 0 \Rightarrow F_\mu \cdot r - S \cdot r = 0 \Rightarrow F_\mu = S$

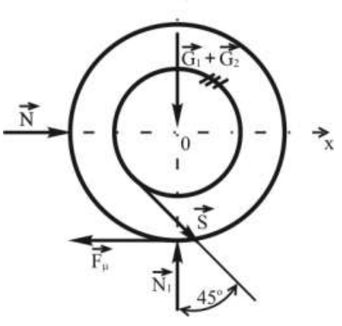
Dodatni uslov: $3'.F_\mu = \mu \cdot N_L$

$$1. \Rightarrow (2 + \sin\alpha)S = G\sin\alpha \Rightarrow S = F_\mu = \frac{G\sin\alpha}{2 + \sin\alpha}$$

$$2. \Rightarrow N_L = G\cos\alpha - \frac{G\sin\alpha\cos\alpha}{2 + \sin\alpha} = \frac{G\cos\alpha(2 + \sin\alpha) - G\cos\alpha\sin\alpha}{2 + \sin\alpha} = \frac{2G\cos\alpha}{2 + \sin\alpha}$$

$$3' \Rightarrow \frac{G\sin\alpha}{2 + \sin\alpha} = \mu\frac{2G\sin\alpha}{2 + \sin\alpha} \Rightarrow \mu = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2}tg\alpha$$

**Primer 4.** Sistem krutih tela prema slici sastoji se od dva spojena valjka (manjeg težine $G_1$ i poluprečnika r i većeg težine $G_2$ i poluprečnika $r_2$) i tega težine $G_3$, povezanog s užetom namotanim oko manjeg diska. Veći disk naslanja se o glatki upravni zid i hrapavu podlogu. Odrediti minimalnu težinu $G_3$ potrebnu za početak kretanja, ako je dato: $G_1$=6kN, $G_2$=12kN, $r_2$=2r i $\mu_0$=0.3.




Ravnoteža valjka: (proizvoljni sistem sila u ravni):

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow N + S\cos 45° - F_\mu = 0$
2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_1 - S\cos 45° - (G_2 + G_1) = 0$

$$\Downarrow$$

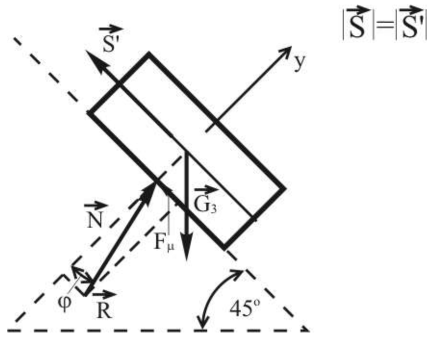
$$N_1 = G_2 + G_1 + S\cos 45° = 18 + S\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\sum M_A{}^{Fi} = 0 \Rightarrow S \cdot r - N_1 \cdot \mu \cdot 2r = 0 / : r$

$S - (18 + S \cdot 0{,}707) \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0$

$0{,}576 S = 10{,}8 \Rightarrow S = \dfrac{10{,}8}{0{,}576} = 18{,}75 kN$

Ravnoteža tereta na strmoj ravni: (tri sučeljne sile).




1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow G_3 \cdot \sin 45° - R \cdot \sin \varphi - S' = 0$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow R \cdot \cos \varphi - G_3 \cdot \cos 45° = 0$

(1)+(2)$\Rightarrow R \cdot \cos \varphi - R \cdot \sin \varphi = S' = 0$

$\Rightarrow R = \dfrac{S'}{\cos \varphi - \sin \varphi} = ........ = 27{,}96 kN$

(1) $\Rightarrow G_3 = \dfrac{R \cdot \cos \varphi}{\sin 45°} = \dfrac{27{,}96 \cdot 0{,}3578}{0{,}707} = 37{,}88 kN \quad R \cdot cos\,\varphi = N \qquad R \cdot sin\,\varphi = F_\mu$

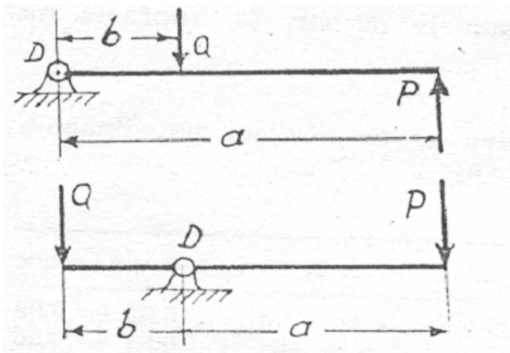
$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F_\mu} \qquad R = \sqrt{N^2 + F_\mu{}^2}$

ugao trenja $\quad \varphi = arctg\mu = arctg 0{,}3 = 16{,}7°$

$F_\mu = \mu \cdot N \qquad \mu = \dfrac{F_\mu}{N} = tg\varphi$

## JEDNOSTAVNE MEHANIČKE MAŠINE

**–** koje u praksi služe za podizanje tereta i stezanje obradka

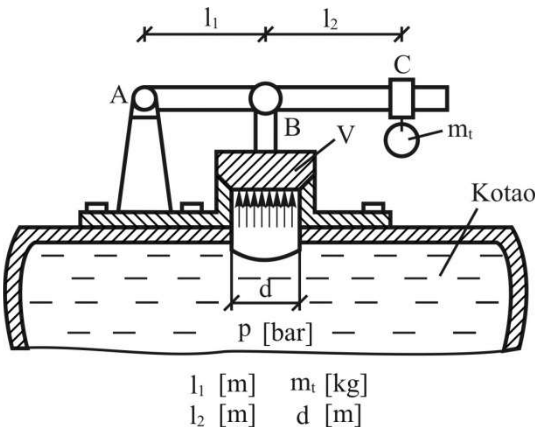



Poluga je čvrsto telo koje se može obrtati oko neke tačke (oslonca, zgloba). Postoje jednokrake i dvokrake poluge. Poluga je jednokraka ako se i sila i teret nalaze na istoj strani oslonca, a dvokraka ako je sila na jednoj strani a teret na drugoj.

Uslov ravnoteže na poluzi:

$P \cdot a = Q \cdot b$

$sila \cdot krak = teret \cdot krak$




Primer : Ventil sigurnosti na parnom kotlu

Kada pritisak u kotlu (p) dostigne propisanu vrednost ventil sigurnosti (V) obara otvor (d).

Za zadate podatke na slici:

Odrediti težinu tega $Q_t\,[N]$ pri čemu će se otvoriti ventil sigurnosti kada pritisak prekorači zadatu vrednost.

Rešenje:

Sistem ventila sigurnosti možemo predstaviti nosačem:

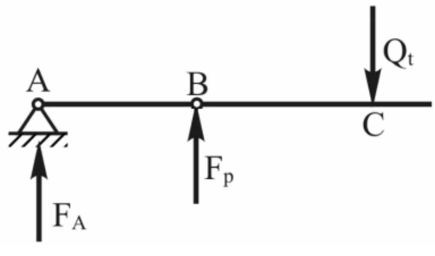
$F_P = (d^2 \pi / 4) \cdot p \qquad \left[ m^2 \cdot \dfrac{N}{m^2} = N \right]$

$F_p$ - sila pritiska na ventil

$Q_t = m_t \cdot g$

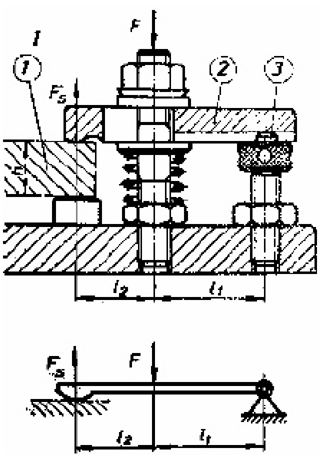
Uslovi ravnoteže ventila glase:

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_i = 0 \rightarrow F_A + F_p - Q_t = 0 \\ &\sum M_B = 0 \rightarrow -Q_t(l_1 + l_2) - F_p \cdot l_1 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow Q_t,\, F_A$$



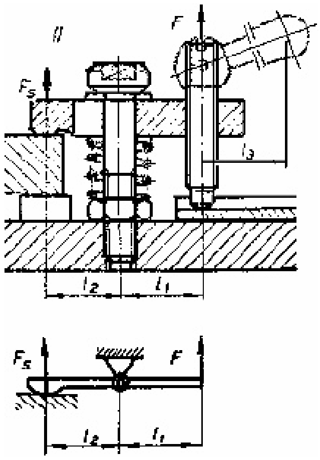
Poluge se veoma često koriste kao elementi za stezanje. Aktivna sila $F$ se najčešće ostvaruje ručno, pomoću vijka, ekscentra ili klina. Sila stezanja $F_S$ zavisi od kraka poluge, međusobnog rastojanja oslonaca i aktivne sile $F$. Mogu se javiti tri slučaja:

1. Sila F je između oslonca i sile stezanja



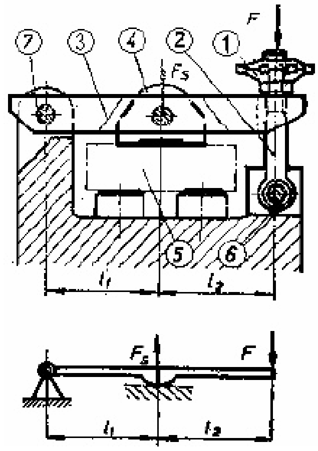

$$F_S = \frac{F \cdot l_1}{l_1 + l_2}$$

2. Oslonac se nalazi između F i $F_S$




$$F_S = \frac{F \cdot l_1}{l_2}$$

3. Sila stezanja se nalazi između oslonca i aktivne sile




$$F_S = \frac{F \cdot (l_1 + l_2)}{l_2}$$

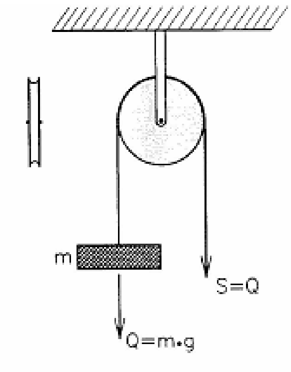
## Koturovi

Pomoću kotura možemo menjati pravac sile.

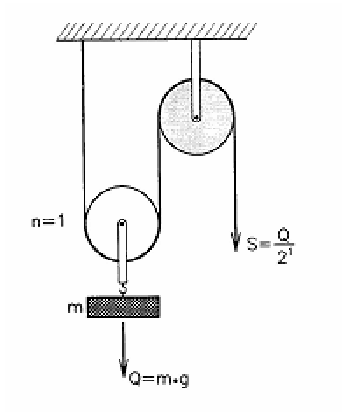
a) Nepomični kotur

$$S = Q$$

Sile jednake na krajevima užeta
- Slučaj kada nema trenja

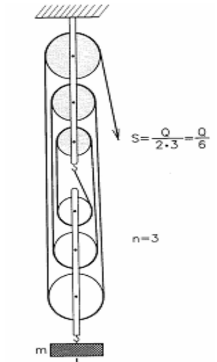



b) pomični kotur




## Koturače

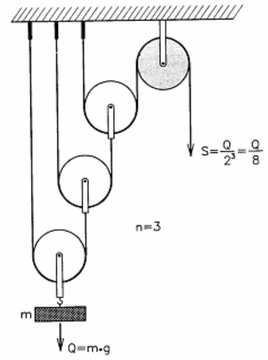
**a) Arhimedova koturača (slučaj bez trenja)**




$$S = Q/(2 \cdot n)$$

n – broj pomičnih koturova

**b)Potencijalna koturača**




$$S = Q/2^n$$

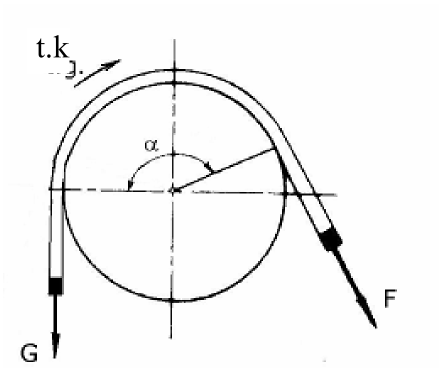
n- broj pomičnih koturova

## Trenje užeta

Trenje užeta je tangencijalni otpor koji se javlja pri relativnom međusobnom klizanju zategnutog užeta prebačenog preko kotura.

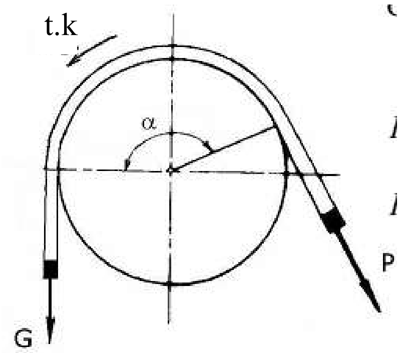
**a) dizanje tereta**

t. k –tendencija kretanja




$$F \succ G$$
$$F = G \cdot e^{\mu\alpha}$$
- Ojlerova formula

**b) pridržavanje tereta**



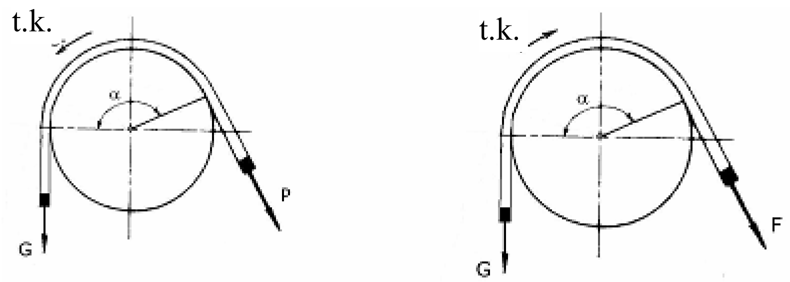

$$P \prec G \Rightarrow G \succ P$$
$$G = P \cdot e^{\mu\alpha} \Rightarrow P = G / e^{\mu\alpha}$$
$$P = G \cdot e^{-\mu\alpha}$$

$\alpha$ - obuhvatni ugao u rad ($\widehat{\alpha} = \alpha^0 \cdot \dfrac{2\pi}{360}$)

$\mu$ - koeficijent statičkog trenja (zavisi od materijala užeta i doboša)

$e = 2.72$ -prirodna konstanta

c) **Ravnotežna sila u uzetu S**




$$P \le S \le F$$
$$G \cdot e^{-\mu\alpha} \le S \le G \cdot e^{\mu\alpha}$$

**Primer: kočnica s trakom**

Za zadate podatke na skici odrediti silu kočenja $F_K$ vratila prenosnika koje se pokreće obrtnim momentom motora (M), a koči trakom.

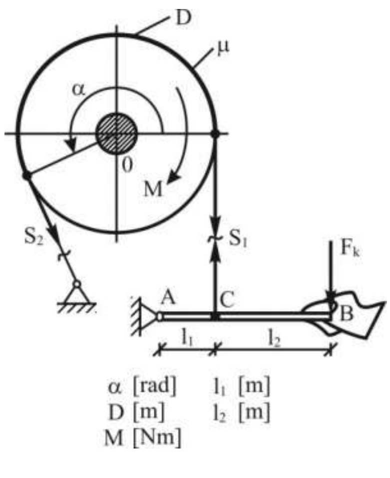
U ovom slučaju uže je nepomično a doboš rotira pod dejstvom sprega, pa će uze pružati otpor okretanju valjka – efekat koji se koristi pri konstrukciji pojasnih kočnica.

Uslovi ravnoteže glase:

Za polugu AB- $\sum M_A = 0 \rightarrow F_K \cdot (l_1 + l_2) - S_1 \cdot l_1 = 0$

Za doboš- $\sum M_O = 0 \rightarrow M + S_1 \cdot D/2 - S_2 \cdot D/2 = 0$

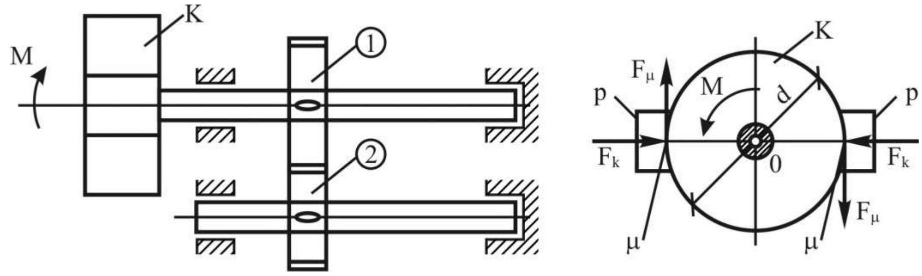
$S_2 \succ S_1 \Rightarrow S_2 = S_1 \cdot e^{\mu\alpha}$ - Ojlerov obrazac




$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{S_1, S_2, F_K \quad [N]}$$

**Primer Kočnica sa papučama**

Za zadate podatke na skici, odrediti silu kočenja ($F_k$) prenosnika koji se pokreće obrtnim momentom motora (M).




$M\ [Nm]$ - Pogonski moment
$d\ [m]$- Prečnik doboša kočnice

Uslov ravnoteže glasi: $\sum M_O = 0 \rightarrow M - F_\mu \cdot d/2 - F_\mu \cdot d/2 = 0$

$M - F_\mu \cdot d = 0$, $F_\mu = F_k \cdot \mu$ -Kulonov zakon trenja

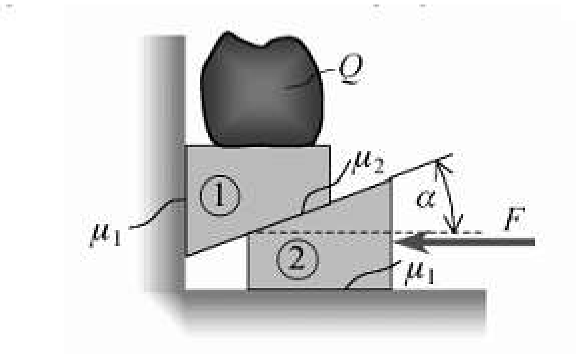
$M - F_k \cdot \mu \cdot d = 0 \rightarrow F_k = M/(\mu \cdot d)\ [N]$

## Klinovi

Klin je jednostavna sprava koja se koristi za podizanje tereta i stezanje obradka u steznom alatu.

**Primer podizanja tereta**

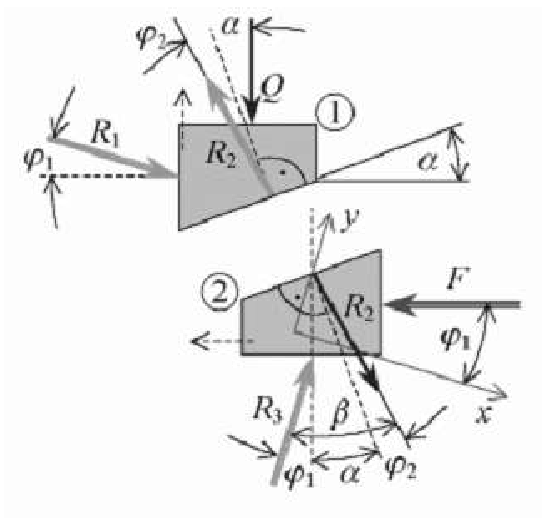
Odrediti veličinu sile F potrebne za dizanje tereta Q pomoću dva klina zanemarljive težine, ako je dato: $Q$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\alpha$




Rešenje:

Koordinatni sistem zaokrene se za ugao $\varphi_1$ što u ovom slučaju pojednostavljuje jednačine ravnoteže.

Klinovi se oslobađaju veza s podlogom ucrtavanjem odgovarajućih reakcija veza.




Uglovi trenja:

$\varphi_1 = arctg\mu_1$

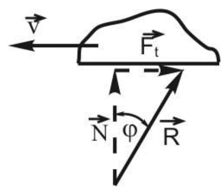
$\varphi_2 = arctg\mu_2$

$\beta = \varphi_1 + \varphi_2 + \alpha$

(Ugao trenja određuje pravac reakcije realne veze $\vec{R}$ (sa trenjem) prema normali na tangencijalnu ravan dodira tela. Za reakciju realne podloge važi:

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_\mu$, odnosno $R = \sqrt{\vec{N} + F_\mu^2}$;

$\frac{F_\mu}{N} = \mu = tg\varphi \Rightarrow \varphi = arctg\mu$ )




Jednačine ravnoteže su:

- klin 1

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow R_1 + Q \cdot \sin\varphi_1 - R_2 \cdot \sin\beta = 0$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Q \cdot \cos\varphi_1 + R_2 \cdot \cos\beta = 0 \Rightarrow R_2 = Q\frac{\cos\varphi_1}{\cos\beta}$

$1. \Rightarrow R_1 = R_2 \sin\beta - Q \cdot \sin\varphi_1$

- klin 2

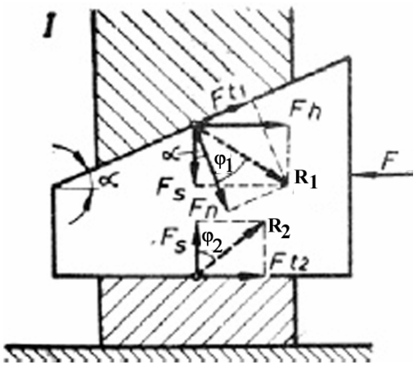
3. $\sum X_i = 0 \Rightarrow -F \cdot \cos\varphi_1 + R_2 \sin\beta = 0 \Rightarrow F = R_2 \dfrac{\sin\beta}{\cos\varphi_1}$

4. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow R_3 - R_2 \cos\beta - F \cdot \sin\varphi_1 = 0 \Rightarrow R_3 = R_2 \cos\beta + F \cdot \sin\varphi_1$

**Primer: proračun stezanja pomoću klina**

Klinovi mogu biti jednostrani i dvostrani.
Jednostrani klin ima jednu strmu ravan pod uglom $\alpha$. Koristi se za direkno i indirekno stezanje.

Kod direknog stezanja s obema dodirnim površinama (kosom i ravnom) aktivna sila $F$ mora biti u ravnoteži sa $F_h$ i $F_{t2}$:



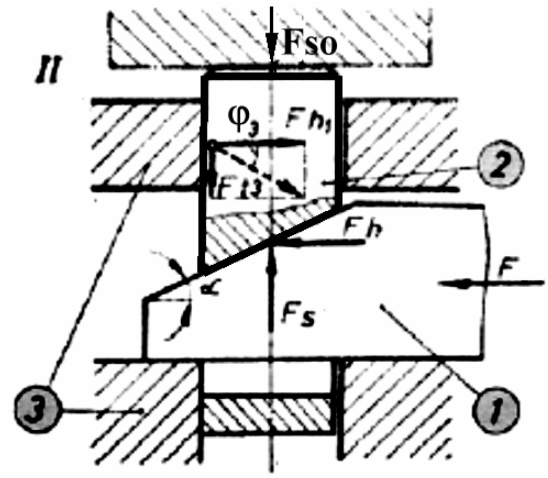

$$F = F_h + F_{t2}$$
$$F_h = F_S \cdot tg(\alpha + \varphi_1); \quad F_{t2} = F_S \cdot tg\varphi_2$$
$$F = F_S [tg(\alpha + \varphi_1) + tg\varphi_2]$$
$$F_S = \frac{F}{tg(\alpha + \varphi_1) + tg\varphi_2}$$

gde je: $\alpha$ - ugao nagiba radne površine klina

$\varphi_1$ - ugao trenja klizanja na kosoj površini klina

$\varphi_2$ - ugao trenja klizanja na ravnoj površini

Za slučaj indirektnog stezanja klin 1 deluje na obradak preko potiskivača 2 oslanjanjem na vođice 3.




Izraz za silu stezanja obradka (dobijen iz uslova ravnoteže potiskivača (2)):

$$F_{SO} = F_S - F_{t3}; \quad F_{t3} = \mu_3 \cdot F_h$$

.............................................

$$F_{SO} = F \cdot \frac{1 - tg(\alpha + \varphi_1) \cdot tg\varphi_3}{tg(\alpha + \varphi_1) + tg\varphi_2}$$

## PODSETNIK MATEMATIČKIH FORMULA

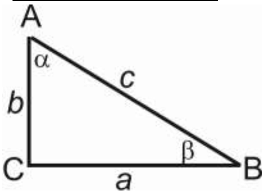
### Algebra

Stepenovanje: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

kvadratna jednačina: $ax^2 + bx + c = 0 \;\rightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

---

### Trigonometrija




U pravouglom su trouglu $\left(\alpha + \beta = 90^0\right)$:
*katete* – stranice a i b uz prav ugao,
*hipotenuza* – stranica c naspram pravog ugla.
Za pravougli trougao važi Pitagorina teorema: $c^2 = a^2 + b^2$

Ugao je deo ravni između dve poluprave koje polaze iz iste tačke s jedne ili s druge strane. Meri se stepenima ($^0$) ( manjim jedinicama: minut (′) i sekund (″)) i radijanima (*rad*). Broj koji se dobije kao količnik dužine luka kružnice i poluprečnika nazina se radijan.

$2\pi\ rad$ =$360^0$ (pun krug je $2\pi\ rad$ ili $360^0$)$\rightarrow 1\ rad = \dfrac{180}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$

Triginimetrijske funkcije ugla $\alpha$ su odnosi stranica pravouglog trougla:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{naspramna\ kateta}{hipotenuza}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{nalegla\ kateta}{hipotenuza},$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{naspramna\ kateta}{nalegla\ kateta}, \quad ctg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{nalegla\ kateta}{naspramna\ kateta}$$

Vrednosti trigonometrijskih funkcija često potrebnih uglova:

| □□□□□□□□$^0$ □□□□□□□ $rad$ | 0 $\pi/6$ | $30^0$ $\pi/6$ | $45^0$ $\pi/4$ | $60^0$ $\pi/3$ | $90^0$ $\pi/2$ | $180^0$ $\pi$ | $270^0$ $3\pi/2$ | $360^0$ $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sin\alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $tg\alpha$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 |
| $ctg\alpha$ | $\pm\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}/3$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ |

### Osnovni odnosi trigonometrijskih funkcija

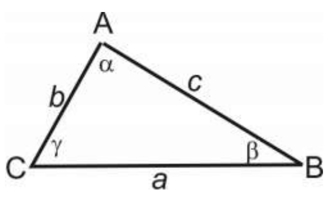
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}\ ; \qquad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ; \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

### Adicione formule

$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\ cos\beta \pm cos\alpha\ sin\beta \qquad cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\ cos\beta \mp sin\alpha\ sin\beta$

$sin 2\alpha = 2 sin\alpha\ cos\alpha \qquad cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

### Kosougli trougao




$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

Sinusna teorema: $\dfrac{a}{sin\alpha} = \dfrac{b}{sin\beta} = \dfrac{c}{sin\gamma}$

Kosinusna teorema: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\gamma$