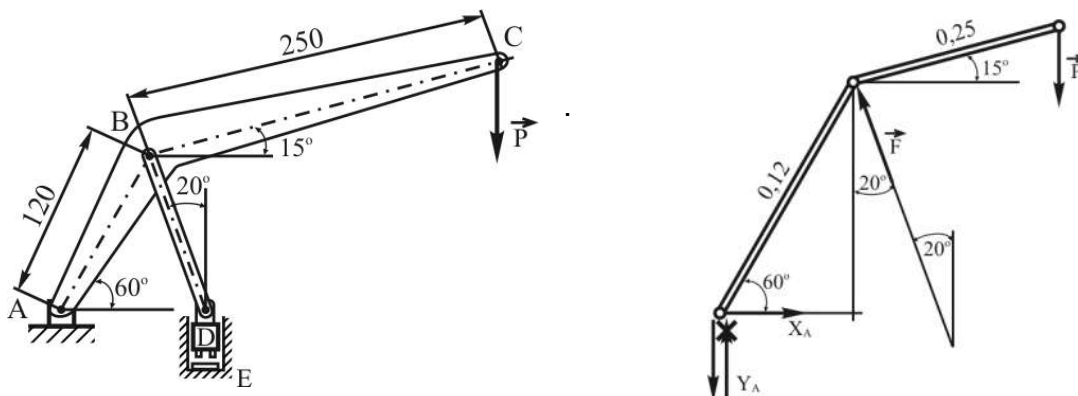


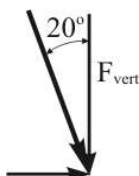
**Primer 5.** Presa prikazana na slici služi za zatvaranje malih konzervi. Ako je veličina sile  $P=250\text{kN}$ , odrediti veličinu vertikalne sile (radnu silu) koja deluje na poklopac konzerve E i reakciju u oslincu A. Težinu elementa D zanemariti.



$$\sum M_A^{F_i} = 0 \Rightarrow -P \overbrace{(0,25 \cos 15^\circ + 0,12 \cos 60^\circ)}^{h_p} + F \cdot \overbrace{0,12 \cos 40^\circ}^{h_F} = 0$$

$$F \cdot 0,12 \cos 40^\circ = P \overbrace{(0,25 \cos 15^\circ + 0,12 \cos 60^\circ)}^{krak}$$

$$F = \frac{250 \cdot 0,30148}{0,0919} = 250 \cdot 3,28 = \underline{\underline{820\text{kN}}}$$



$$F_{\text{vert}} = F \cdot \cos 20^\circ = \underline{\underline{770,55\text{kN}}}$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A = F \cdot \sin 20^\circ = 820 \cdot 0,342 = 280,44\text{kN}$$

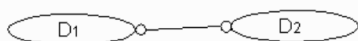
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + F \cdot \cos 20^\circ - P = 0$$

$$Y_A = -520,55\text{kN}$$

$$Y_A = 520,55\text{kN}(\downarrow)$$

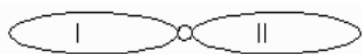
### Ravnoteža sistema krutih tela

Veoma često postoji potreba za međusobnim povezivanjem tačaka, tačaka i tela, dva ili više tela (konstrukcija = tela + veze). Jednostavna tela pomoću unutrašnjih veza mogu se spojiti u nova složena tela:



Štap – sprečava translatorsni pomak dva tela u pravcu štapa, a dopušta rotaciju i translaciju u drugom pravcu. Oduzima jedan stepen slobode, tj. preuzima na sebe jednu unutrašnju silu.

Zglob (nepomični) između dva tela – dozvoljava rotaciju, ali ne i translaciju dva tela. oduzima dva



stepena slobode, tj. preuzima na sebe dve unutrašnje sile.

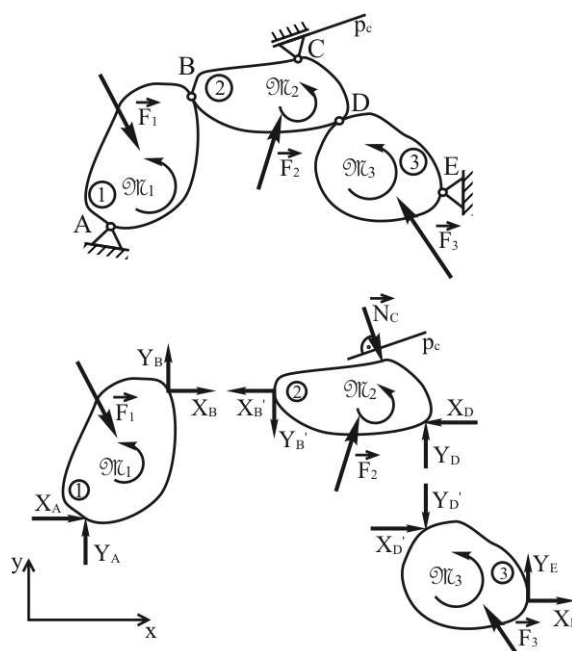
Kruta veza – oduzima tri stepena slobode odnosno



preuzima na sebe tri stepena slobode.

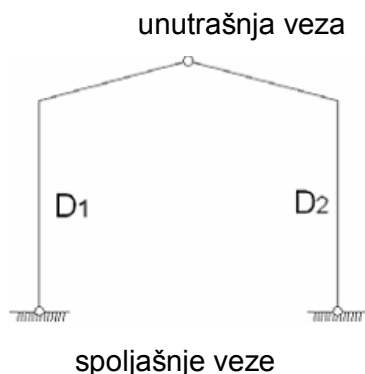
Obično imamo na nekom telu kombinaciju unutrašnjih i spoljašnjih veza. Kod veza (unutrašnjih i spoljašnjih) treba paziti na njihov raspored da ne bi došlo do mehanizma (geometrijski promenljiv sistem).

Statički sistem, sastavljen od tri tela, je vezan za nepomičnu okolinu u tačkama A, C i E (spoljašnje veze). Međusobno su figure vezane cilindričnim zglobovima u tačkama B i D koje se nazivaju



unutrašnje veze. U unutrašnjim vezama reakcije se pojavljuju u parovima prema principu jednakosti akcije i reakcije. Ako se žele odrediti samo spoljašnje reakcije sistem smatramo jednom figurom i postavimo 3 uslova ravnoteže a imamo 5 nepoznatih još 2 jednačine postavljaju se na osnovu činjenice da cilindrični zglobovi ne mogu preneti momente.

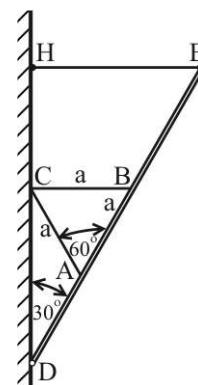
Za svako telo se postave po 3 uslova ravnoteže  $\Rightarrow$  9 nepoznatih veličina.



**Unutrašnje veze** – veze kojima se jednostavna tela međusobno spajaju u sistem tela

**Spoljašnje veze** - veze tela sa podlogom

**Primer1.** Prava homogena prizma težine  $\vec{G}$  sa osnovom u obliku jednakostranog trougla stranice  $a$  oslanja se ivicom C o glatki vertikalni zid a stranom AB o glatki štap zanemarljive težine i dužine  $3a$  koji je u tački D zglobno vezan za zid. U tački E štap je horizontalnim neistegljivim užetom zanemarljive težine vezan za vertikalni zid. Odrediti silu  $\vec{S}$  u užetu, reakcije zgloba D i pritisak  $\vec{N}_c$  prizme na zid.



Rešenje:

$$\cos 30^0 = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}$$

Prizma:

$$\operatorname{ctg} 30^0 = \frac{N_C}{G} \Rightarrow N_C = G \operatorname{ctg} 30^0 = G\sqrt{3}$$

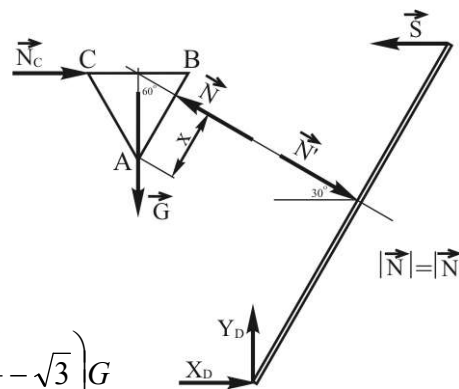
$$\sin 30^0 = \frac{G}{N} \Rightarrow N = \frac{G}{\sin 30^0} = 2G$$

Štap DE:

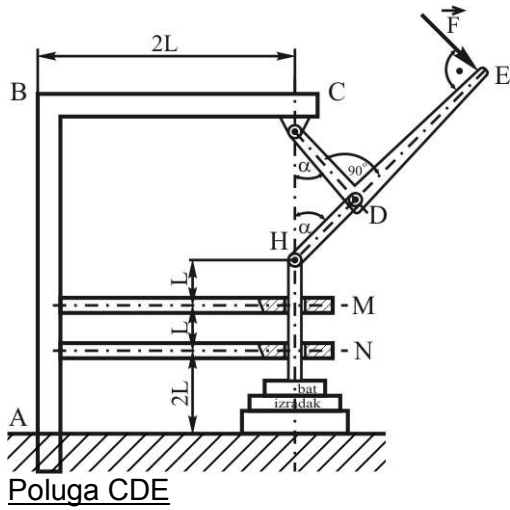
$$1. \sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow X_D - S + N' \cos 30^0 = 0 \Rightarrow X_D = \left( \frac{7\sqrt{3}}{9} - \sqrt{3} \right) G$$

$$2. \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \Rightarrow Y_D - N' \sin 30^0 = 0 \Rightarrow Y_D = G$$

$$3. \sum_{i=1}^n M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow S \cdot 3a \cdot \cos 30^0 - N' \cdot \left( a + \frac{3a}{4} \right) = 0 \Rightarrow S = \frac{7\sqrt{3}}{9} G$$

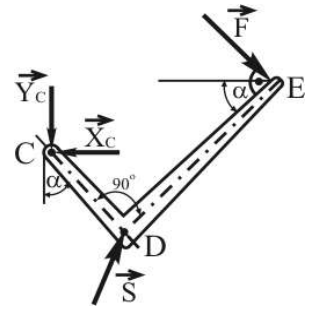


**Primer2.** Odrediti reakcije uklještenja A prese ako na kraju E pravougaone poluge CDE deluje sila poznata sila  $\vec{F}$  koja je upravna na pravac DE. Poznate su dužine  $\overline{CD} = \overline{DH} = l$  i  $\overline{DE} = 4l$  i ugao  $\alpha = 30^0$ . Ostale dimenzije su prikazane na slici. Veze u tačkama C, D i H su zglobne.



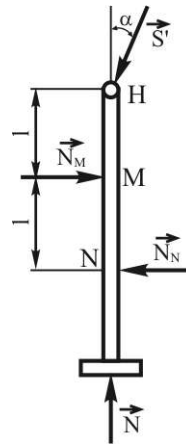
Poluga CDE

1.  $\sum X_i = 0 \Rightarrow -X_C + S \sin \alpha + F \sin \alpha = 0 \Rightarrow X_C = 2.8F$
2.  $\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_C + S \cos \alpha - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow Y_C = 3.13F$
3.  $\sum M_C = 0 \Rightarrow -F \cdot \overline{DE} + S \cos \alpha \cdot \overline{CD} \sin \alpha + S \sin \alpha \cdot \overline{CD} \cos \alpha = 0 \Rightarrow S = 4.6F$



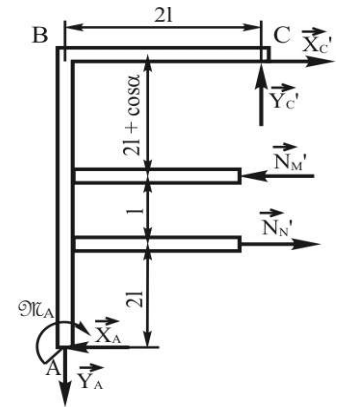
Štap NH

1.  $\sum X_i = 0 \Rightarrow N_M - N_N - S \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_N = 2.3F$
2.  $\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - S \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = 4F$
3.  $\sum M_N = 0 \Rightarrow S \sin \alpha \cdot 2l - N_M \cdot l = 0 \Rightarrow N_M = 4.6F$

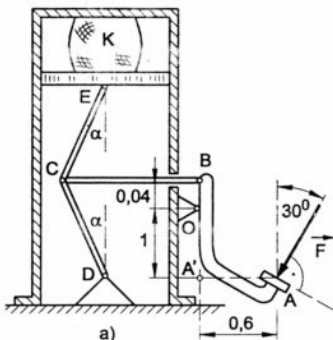


Okvir prese ABC

1.  $\sum X_i = 0 \Rightarrow -X_A + X_C - N_M + N_N = 0 \Rightarrow X_A = 0.5F$
2.  $\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + Y_C = 0 \Rightarrow Y_A = 3.13F$
3.  $\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - N_N \cdot 2l + N_M \cdot 3l + Y_C \cdot 2l - X_C(4l + 2l \cos \alpha) = 0 \Rightarrow M_A = 0.8Fl$



**Primer 3:** Sila koja deluje na polugu AO, nožne prese, koja se obrće oko ose  $o$ , je 200N. U posmatranom položaju prese poluga BC je upravna na OB i polovi ugao  $\sphericalangle ECD$ , pri čemu je  $\alpha = \arctg 0.2$  i dužine poluga  $OA' = 1m$ ,  $OB = 0.04m$ ,  $AA' = 0.6m$ . Trenje između klizača i vodice zanemariti i smatrati da je u prikazanom položaju sistem u ravnoteži. Potrebno je odrediti veličinu sile koja deformiše radni predmet K.



Rešenje:

Obzirom da je reč o sistemu krutih tela, zadatak ćemo rešiti rastavljanjem na sastavne elemente a uticaj odstranjenih elemenata na posmatrane zameniti silama.

Na polugu AB sistema deluje proizvoljni sistem sila u ravni pa su jednačine ravnoteže:

$$1. \sum X_i = 0 \Rightarrow X_o - S_1 - F \sin 30^\circ = 0$$

$$2. \sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_o - F \cos 30^\circ = 0$$

$$3. \sum M_o^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot 0,04 - F \cos 30^\circ \cdot 0,6 - F \sin 30^\circ \cdot 1 = 0 \Rightarrow S_1 \approx 5,1 kN$$

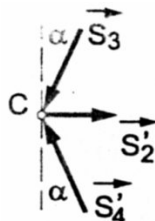
Iz jednačina 1 i 2 možemo odrediti  $X_o$  i  $Y_o$ , što se u zadatku nije tražilo.

Za određivanje sila u štapovima CD i CE posmatraćemo ravnotežu zgloba C u kome se sučeljavaju kruti laki štapovi (2 jednačine):

$$5. \sum X_i = 0 \Rightarrow S_2 - S_3 \sin \alpha - S_4 \sin \alpha = 0$$

$$6. \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_4 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow S_3 = S_4$$

$$5. \Rightarrow S_3 = \frac{S_2}{2 \sin \alpha} = 26 kN = S_4, \quad S_3 = S_4$$

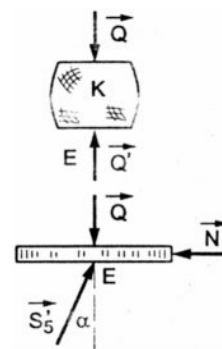
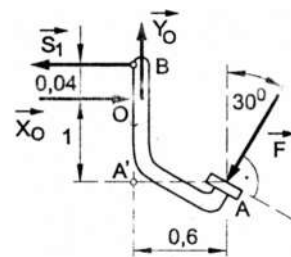


Na klizač E deluje sučeljni sistem sila ( $\vec{N}$ ,  $\vec{Q}$  i  $S_5$ ) pa su jednačine ravnoteže:

$$7. \sum X_i = 0 \Rightarrow S_3 \sin \alpha - N = 0 \Rightarrow N = 5,1 kN$$

$$8. \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_3 \cos \alpha - Q = 0 \Rightarrow Q = S_3 \cos \alpha = 25,5 kN - \text{sila kojom se}$$

deformiše radni predmet.



### Stabilnost ravnoteže

Kod pomičnih dizalica interesantna je stabilnost konstrukcije na prevrtanje jer veze ovakvih konstrukcija obično nisu dvostrane. Protivteg nadomešten je silom  $\vec{P}$  koja ima promenljiv krak  $x_p$  u odnosu na koordinatni početak. Težina tereta i pomičnog dela uređaja koji služi za podizanje tereta označeni su silom  $\vec{Q}$  koja ima promenljiv krak i veličinu. Ostale delove dizalice nadomešta sila  $\vec{G}$  koja ima stalan pravac delovanja i stalnu veličinu. Da bi dizalica mogla raditi moraju biti zadovoljena dva uslova:

$$1. \sum Y_i = 0 \quad (\text{uvek zadovoljen})$$

$$2. \sum M_{A,B} = 0$$

Ako 2. uslov nije zadovoljen dizalica će se prevnuti. Prvenstveno treba kontrolisati mogućnost prevrtanja oko tačke B. U tom slučaju se:

$$M_p = Q(x_Q - x_B) - \text{naziva momentom prevrtanja}$$

$$M_s = G(x_B - x_G) + P(x_B + x_P) - \text{momentom stabilnosti.}$$

Reakcija u tački A jednaka je nuli jer ustvari posmatramo dizalicu kada je ona zarotirala za beskonačno mali ugao te je točak A izgubio kontakt sa nepomičnom podlogom.

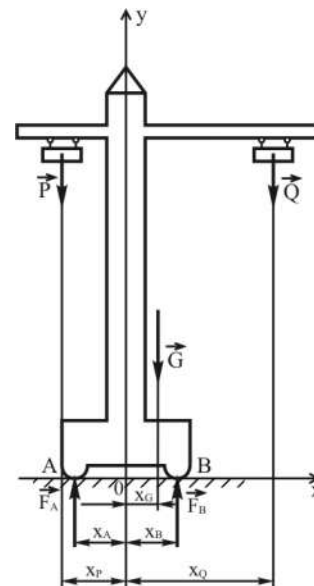
Sada se mogu definisati tri stanja dizalice.

$$M_s > M_p - \text{dizalica je stabilna}$$

$$M_s < M_p - \text{dizalica će se prevnuti}$$

$$M_s = M_p - \text{stanje dizalice je granično.}$$

Povećanjem kraka protivtega u odnosu na tačku B povećava se veličina momenta stabilnosti  $M_s$  pa se može dizati teret veće težine i na većem kraku. Veličina protivtega i njegovo pomicanje ne smeju rezultirati momentom takve veličine da izazovu prevrtanje dizalice oko tačke A.



**Primer 1.** Pokretna dizalica (sl. 1) težine  $G = 200 \text{ kN}$ , ima dohvat  $l = 5 \text{ m}$  i rastojanje između točkova  $AB = a = 4 \text{ m}$ . Težina dizalice se nalazi na vertikali koja prolazi kroz sredinu duži  $AB$ . Težina protivtega, koji i oblik kocke ivice  $b = 2 \text{ m}$ , iznosi  $P = 50 \text{ kN}$ . Odrediti:

a) najveću težinu  $Q_{\max}$  tereta, koji može dizalica da podigne, a da pri tome ne dođe do preturanja oko tačke A,

б) pritisak točkova na podlogu ako je u radnim uslovima  $Q = 100 \text{ kN}$ .

Rešenje:

U граничном položaju ravnoteže točak B se odvaja od podloge (reakcija  $F_B = 0$ ) i celokupni pritisak se prenosi preko točka A.  $Q_{\max}$  odredićemo iz uslova jednakosti momenta stabilnosti i momenta prevrtanja.

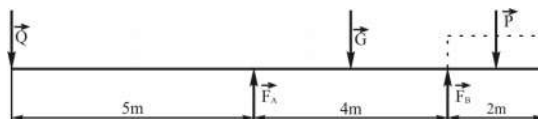
$$M_A^{\vec{G}} + M_A^{\vec{P}} = M_A^{\vec{Q}_{\max}}$$

$$G \frac{a}{2} + P \left( \frac{b}{2} + a \right) = Q_{\max} \cdot l$$

Zamenom vrednosti i izračunavanjem dobija se maksimalna veličina tereta:

$$Q_{\max} = 130 \text{ kN}$$

Ako je veličina tereta  $Q < Q_{\max}$  pritisak točkova na podlogu računa se modeliranjem dizalice gredom sa prepustima.



Pošto je reč o paralelnom sistemu sila napisaćemo dve jednačine ravnoteže:

$$1. \sum_{i=1}^5 Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B - Q - G - P = 0 \Rightarrow F_A + F_B = 350 \text{ kN}$$

$$2. \sum_{i=1}^5 M_B^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow Q(l + a) - F_A \cdot a + G \cdot \frac{a}{2} - P \cdot \frac{b}{2} = 0$$

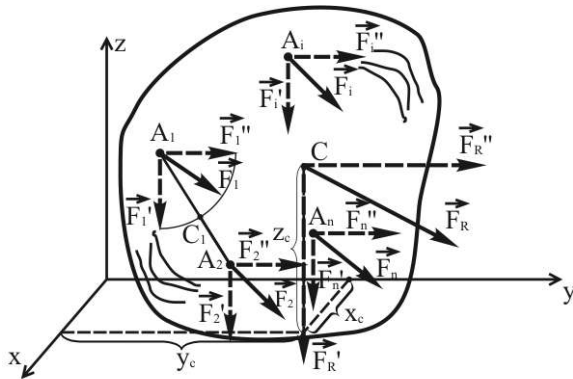
Zamenom vrednosti i izračunavanjem iz jednačine 2.  $\Rightarrow F_A = 312.5 \text{ kN}$  1.  $\Rightarrow F_B = 37.5 \text{ kN}$

## TEŽIŠTE HOMOGENIH LINIJA, POVRŠINA I TELA

Neka na kruto telo deluje sistem paralelnih i jednako umerenih sila:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  u tačkama  $A_1, A_2, \dots, A_n$  čije su koordinate:  $(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_n, y_n, z_n)$ . Ovaj sistem se može svesti na rezultantu  $\vec{F}_R$  usmerenu u stranu u koju su usmerene njene komponente a veličina te rezultante:

$$F_R = \sum F_i$$

Napadna tačka ove rezultante naziva se središte sistema paralelnih sila C. Pri obrtanju svih komponentnih paralelnih sila oko njihovih napadnih tačaka za isti ugao i u istu stranu i rezultanta

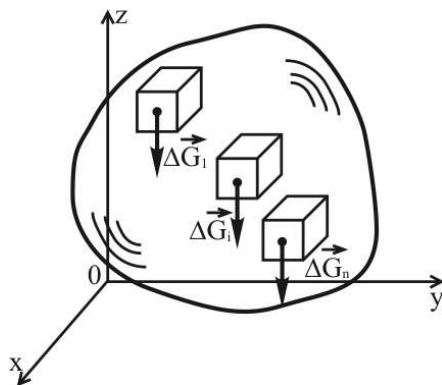


se obrne oko centra za isti ugao i u istu stranu. To je fiksna tačka. Primenom Varinjonove teoreme za zaokrenuti sistem sila određuju se koordinate središta sistema.

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{F_R};$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_i}{F_R}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{F_R}.$$

Model tela za određivanje položaja njegovog težišta formira se podelom tela na delove: koji moraju biti homogeni (raspored mase jednolik) a oblik im mora biti takav da je poznata napadna tačka njegove težine. Telo možemo zameniti sa sistemom sila. Za opisani model moguće je odrediti rezultantu - to je ukupna težina tela i njena napadna tačka je težište tela.



$$G = \sum_{i=1}^n \Delta G_i$$

Koordinate  $x_c, y_c, z_c$  težišta krutog tela određene su formulama:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i x_i}{G}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i y_i}{G}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i z_i}{G}$$

Težište je geometrijska tačka i može da se nalazi izvan konture datog tela. Kod homogenog tela:

$$\Delta G_i = \gamma \Delta V_i, \quad G = \gamma \cdot V$$

$\gamma$  - specifična težina

Koordinate  $x_c, y_c, z_c$  težišta C homogenog tela određuju se prema formulama:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i x_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i y_i}{V}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i z_i}{V}.$$

Iz ovih izraza nestale su materijalne karakteristike ostala je samo geometrija tela težišta homogenih tela poklapa se sa težištem geometrijskih tela. Nekim telima se kod određivanja težišta može zanemariti jedna dimenzija i smatramo ih dvodimenzionalnim ili teškim pločama ( $\Delta V_i = \delta \cdot \Delta A_i$ ) koordinate  $x_c, y_c, z_c$  težišta C ploče male debljine određene su formulama:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta A_i x_i}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta A_i y_i}{A}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta A_i z_i}{A}.$$

U slučaju homogene ploče koja se nalazi u ravni xOy

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta A_i x_i}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta A_i y_i}{A}; \quad z_c = 0.$$

$$S_y = \sum \Delta A_i x_i \quad - \quad \text{statički moment površine za osu y}$$

$$S_x = \sum \Delta A_i y_i \quad - \quad \text{statički moment površine za osu x}$$

Kada se telu mogu zanemariti dve dimenzije takva tela nazivamo teške linije. Koordinate težišta C homogene linije određuju se formulama:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta L_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta L_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta L_i z_i}{L}.$$

U slučaju kada kriva leži u ravni xOy biće  $z_c = 0$

Kada nije moguće tela, ploče ili linije podeliti na homogene delove sa poznatim težištem statički momenti i težine određuju se pomoću integrala

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}; \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}; \quad z_c = \frac{\int z dV}{V}; \quad x_c = \frac{\int x dA}{A}; \quad y_c = \frac{\int y dA}{A};$$

$$z_c = \frac{\int z dA}{A}; \quad x_c = \frac{\int x dL}{L}; \quad y_c = \frac{\int y dL}{L}; \quad z_c = \frac{\int z dL}{L}.$$

Ako kruto telo ima ravan simetrije, onda težište C leži u toj ravni (treba odrediti 2 koordinate težišta). Ako telo ima dve težišne ravni tada se težište nalazi na njihovoj presečnici i nepoznata nam je samo njegova koordinata po presečnici.

Težište tela koje ima tri težišne ravni a koje imaju samo jednu zajedničku tačku nalazi se u toj tački. U ovom slučaju poznate su nam sve tri koordinate težišta.

Težišta osnovnih geometrijskih oblika, na koja se tela obično dele ili su sastavljena od tih delova, određuju se pomoću izraza:

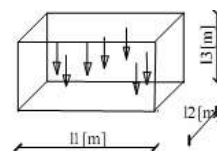
### Težište složenih oblika

Pod složenim oblikom podrazumevamo ili telo koje se može podeliti na jednostavne osnovne oblike ili skup jednostavnih oblika. Jednostavni oblici su uvek homogeni a složeni je oblik po pravilu heterogen. Za određivanje položaja težišta složenih oblika koriste se modificirani izrazi u kojima je  $i$  oznaka  $i$ -tog jednostavnog oblika:

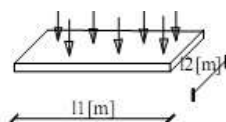
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i}.$$

Veličina  $G_i$  jeste težina  $i$ -tog osnovnog dela i ona je različito definisana, zavisno da li je taj deo :

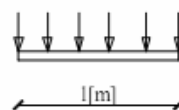
- prostorni  $G_i = \gamma_i \cdot V_i$   
 $\gamma [N/m^3]$  - zaprminska specifična težina



- površinski  $G_i = \gamma_i \cdot A_i$ ,  
 $\gamma [N/m^2]$  - površinska specifična težina



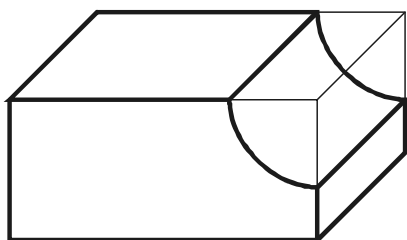
- linijski  $G_i = \gamma_i'' \cdot L_i$   
 $\gamma_i'' [N/m]$  - linijska specifična težina



u izrazima  $V_i$ ,  $A_i$  i  $L_i$  su zapremine, površine i dužine elemenata, a  $\gamma, \gamma', \gamma''$  - njihove specifične težine.

c) Dopunjavanje (metod negativnih težina)

Ako u složenoj formi postoje rupe ili prekidi može se proračun pojednostaviti ako se spomenuti diskontinuiteti smatraju jednostavnim oblicima ali sa negativnim zapreminama, površinama ili linijama (težinama). Sile težine dodatih tela imaju suprotan smer od smera težine punog tela pa se zato nazivaju negativne težine.



Telo prikazano na slici dobijamo kada od celog paralelepipeda oduzmemo četvrtinu valjka

$$G = G_1 - G_2 \quad (V = V_1 - V_2)$$

a koordinate težišta:

$$x_C = \frac{V_1 x_1 - V_2 x_2}{V_1 - V_2}; y_C = \frac{V_1 y_1 - V_2 y_2}{V_1 - V_2}; z_C = \frac{V_1 z_1 - V_2 z_2}{V_1 - V_2}$$

### Težište homogenih linija

### Težište homogenih površina

<p>① Duž</p> $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$ $l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	<p>① Trougao</p> $A = (a \cdot b) / 2$ $x_C = a / 3$ $y_C = b / 3$
<p>② Kružni luk</p> $x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$ $y_C = 0$ $\alpha = [\text{rad}]$ $l = 2R\pi / 180$ $\alpha = [^\circ]$	<p>② Trougao</p> $x_C = (a-b) / 3$ $y_C = h / 3$ $A = (a+b) \cdot h / 2$
<p>③ Krug</p> $x_C = 0$ $y_C = 0$ $l = 2R\pi$	<p>③ Kružni isečak</p> $x_C = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ $y_C = 0$ $\alpha = [\text{rad}]$ $A = R^2 \alpha$
<p>④ Polukrug</p> $x_C = \frac{2R}{\pi}$ $y_C = 0$ $l = R\pi$	<p>④ Krug</p> $x_C = 0$ $y_C = 0$ $A = R^2 \pi$
<p>⑤ Četvrt kruga</p> $x_C = \frac{2R}{\pi}$ $y_C = \frac{2R}{\pi}$ $l = R\pi / 2$	<p>⑤ Polukrug</p> $x_C = 4R / 3\pi$ $y_C = 0$ $A = R^2 \pi / 2$
	<p>⑥ Četvrt kruga</p> $x_C = 4R / 3\pi$ $y_C = 4R / 3\pi$ $A = R^2 \pi / 4$

### Papus -Guldinove teoreme

Ako se kriva MN dužine L, zatvara za ugao  $\varphi$  oko ose y koja leži u njenoj ravni nastaje rotaciona površ. Površina ove površi može se izračunati na sledeći način:



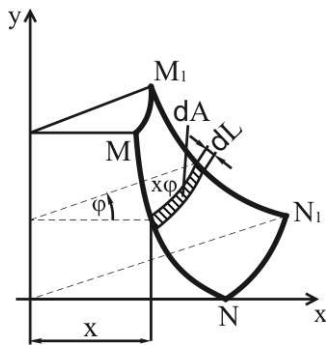
$$dA = x\varphi \cdot dL$$

$$A = \varphi \int_L x dL$$

Izraz  $\int_L x dL$  predstavlja statički moment linije MN

$$\text{za osu } y \text{ koji je jednak: } x_C L = \int_L x dL$$

Cela obrtna površina nastaje obrtanjem za pun ugao  $\varphi = 2\pi$  pa veličini te površine je jednaka:  $A = 2\pi x_C L$ ,  $\varphi$ -ugao rotacije

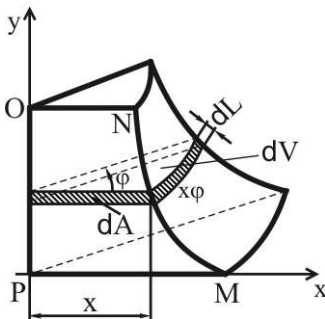


Matematički zapis I Pappus-Guldinoveg pravila:  $A = x_C \cdot \varphi \cdot L$

Površina rotacione površi, nastale rotacijom krive linije MN jednaka je proizvodu dužine te linije i puta koga težište linije opiše prilikom obrtanja. (Prvo Pappus-Guldinovo pravilo).

Zarotiramo li ravnu figuru MNOP površine A za ugao  $\varphi$  oko ose y koja leži u njenoj ravni nastaje rotaciono telo.

Zapremina ovog tela može se odrediti na sledeći način:



$$dV = x \cdot \frac{x\varphi}{2} \cdot dL \Rightarrow V = \varphi \int_M^N \frac{x^2}{2} dL$$

Izraz  $\int_M^N \frac{x^2}{2} dL$  predstavlja statički moment površine MNOP za osu

$$y: x_C \cdot A = \int_M^N \frac{1}{2} x \cdot x dL$$

Zamenom ovih izraza u početni dobija se:

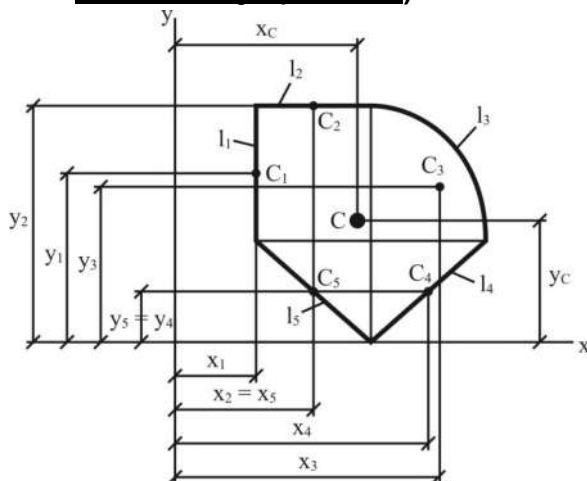
$$V = x_C \cdot \varphi \cdot A - \text{matematički zapis II Pappus - Guldinove}$$

teoreme. Zapremina rotacionog tela koje nastaje obrtanjem ravne površine oko ose jednaka je proizvodu veličine te površine i puta koje težište površine opiše prilikom obrtanja (rotacije).

Cela obrtna zapremina ( za  $\varphi = 2\pi$  ) će iznositi:

$$V = 2\pi x_C A$$

### Težište linija (kontura)



$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  - Težište svakog dela konture

$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  - Dužina svakog dela konture

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  - Položaj težišta po x osi [mm]

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  - Položaj težišta po y osi [mm]

Položaj težišta cele konture:

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}, i = 1,5 \rightarrow$$

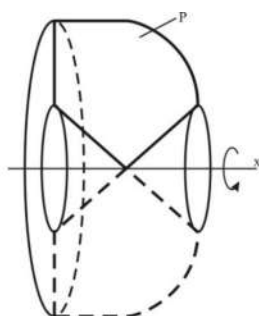
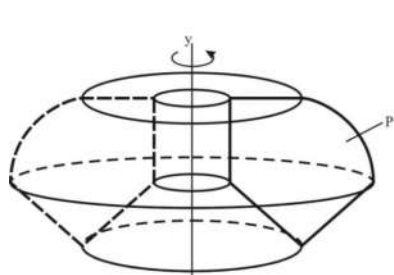
$$x_C = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4 + l_5 x_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5} \text{ [mm]}$$

$$y_C = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i}, i = 1,5 \rightarrow$$

$$y_C = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3 + l_4 y_4 + l_5 y_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5} \text{ [mm]}$$

Izračunavanje položaja težišta linije (konture) ima veliki značaj u praksi:

– Za izračunavanje (pozicioniranje) položaja obratka na presi za prosecanje i probijanje delova od lima. Pravac dejstva sile (F) na presi mora biti podešen da prolazi kroz težište konture (C) radi osiguranja od oštećenja.



– Za izračunavanje razvijene površine (rondele prečnika D) koja odgovara složenoj površini koja nastaje obrtanje (rotacijom) konture oko jedne od osa (x,y).

U ovom slučaju se koristi: Prva Pappus-Guldenova teorema:

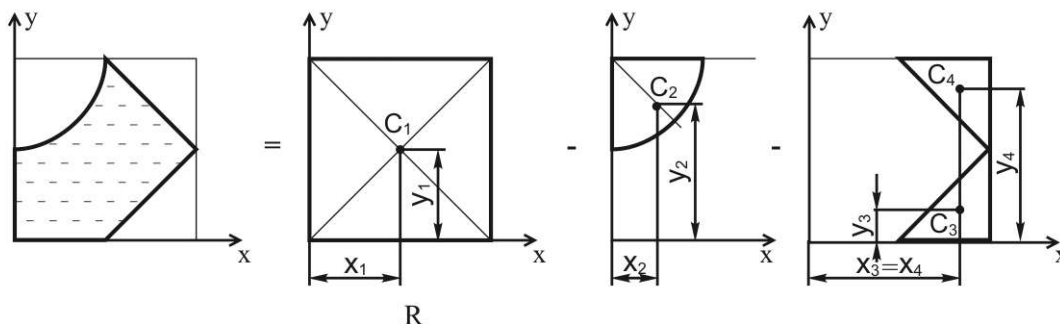
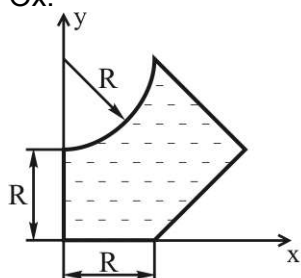
za rotaciju oko ose (y):  $P = 2\pi \sum l_i \cdot x_C = 2\pi \cdot L \cdot x_C [mm]$ ,  $P = 2\pi \cdot L \cdot x_C = D^2 \pi / 4$

$$D = \sqrt{8 \cdot L \cdot x_C} [mm] - \text{prečnik rondela}$$

za rotaciju oko ose (x):  $P = 2\pi \cdot \sum l_i \cdot y_C = 2\pi \cdot L \cdot y_C [mm^2]$ ,  $P = 2\pi \cdot L \cdot y_C = D^2 \pi / 4$

$$D = \sqrt{8 \cdot L \cdot y_C} [mm] - \text{prečnik rondela}$$

**Primer1.** Odrediti koordinate težišta date geometrijske slike računskim putem. Primenom druge Guldinove teoreme odrediti veličinu zapremine tela koje nastaje obrtanjem date površine oko ose Ox.



	$A_i (cm^2)$		$x_i (cm)$		$y_i (cm)$		$A_i x_i (cm^3)$	$A_i y_i (cm^3)$
1.	$4R^2$	$4R^2$	R	R	R	R	$4R^3$	$4R^3$
2.	$-R^2\pi/4$	$-0.78R^2$	$4R/(3\pi)$	$0.42R$	$2R-4R/(3\pi)$	$1.58R$	$-0.33R^3$	$-1.23R^3$
3.	$-R^2/2$	$-0.5R^2$	$2R-R/3$	$1.67R$	$R/3$	$0.33R$	$-0.83R^3$	$-0.16R^3$
4.	$-R^2/2$	$-0.5R^2$	$2R-R/3$	$1.67R$	$R+2R/3$	$1.67R$	$-0.83R^3$	$-0.83R^3$
$\Sigma$	$A=2.22R^2$						$1.91R^3$	$1.78R^3$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i x_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{1.91R^3}{2.22R^2} \approx 0.86R(\text{cm})$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i y_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{1.78R^3}{2.22R^2} \approx 0.8R(\text{cm})$$

Zapremina tela koje nastaje obrtanjem površine oko ose Ox:

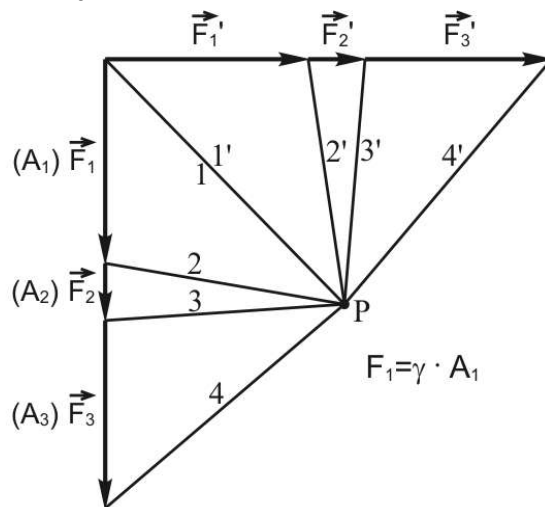
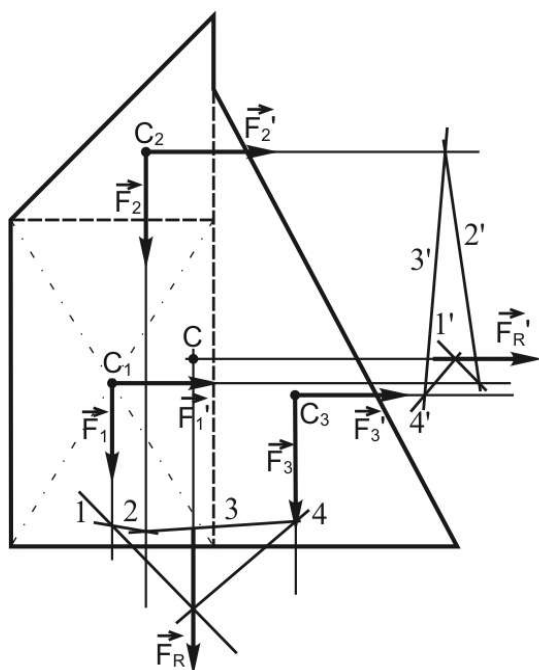
$$V = 2\pi \cdot y_c \cdot A = 2 \cdot 3.14 \cdot 0.8R \cdot 2.22R^2 = 11.1R^3$$

### Grafičko određivanje težišta

Težište je tačka kroz koju prolazi rezultanta sistema paralelnih sila.

Kod grafičkog određivanja položaja težišta koristi se činjenica da središte sistema vezanih paralelnih sila ne zavisi od ugla kojeg pravci delovanja zaklapaju sa nekom referentnom osom. Postupak grafičkog određivanja opisaće se za ravnu figuru:

1. Zadato telo podelimo na konačan broj delova čije težine (površine) i težišta znamo odrediti.
2. Konstruišemo poligon sila (površina) i odredimo ukupnu težinu (površinu) tela
3. Pomoću verižnog poligona odredimo pravac delovanja rezultante na planu položaja na ovom se pravcu nalazi težište figure
4. Zaokrenemo pravce delovanja svih sila (površina) na planu položaja u njihovim napadnim tačkama za isti ugao (obično 90°)
5. Konstruišemo poligon sila za zaokrenuti sistem sila (površina) i pomoću verižnog poligona odredimo pravac delovanja rezultante na planu položaja
6. Težište figure nalazi se u preseku pravaca delovanja rezultanti.



Težište je tačka kroz koju prolazi rezultanta sistema paralelnih sila

Plan položaja

Plan sila

Položaj težišta izračunava se:  $x_c = \overline{OC'} \cdot U_L$ ,  $y_c = \overline{OC''} \cdot U_L$

$\overline{OC'}$  i  $\overline{OC''}$  - izmerene dužine sa crteža,  $U_L$  - izabrana razmera za dužinu

# GRAFOSTATIKA

## Vrste nosača

Kruto telo koje prenosi opterećenja, koja mu saopštavaju tela koja su sa njim u kontaktu, na oslonce naziva se nosačem.

Nosači mogu biti ravni i prostorni (ploča i sva opterećenja u ravni ploče). Ako osa nosača i opterećenja leže u jednoj ravni, nosač je ravan. Opterećenja prostornih nosača imaju proizvoljan pravac u prostoru. U ovom poglavlju ograničićemo se samo na ravne nosače i zvaćemo ih prosto nosači. Ako se nosač sastoji samo iz jednog krutog tela onda je on prost, u suprotnom je složen. Dalje, nosači mogu biti:

- gredni (puni nosači-grede)
- rešetkasti (rešetke)
- okviri (ramovi-okviri)

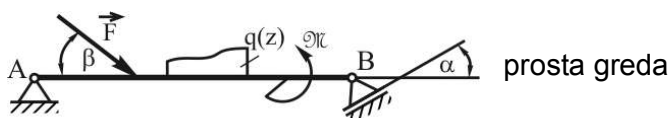
Puni nosači koriste se:

- za premošćivanje raspona
- za osiguranje forme zgrada
- kao elementi različitih konstrukcija, mehanizama, dizalica i sl.

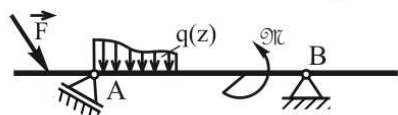
U stvarnosti-puni nosači imaju uvek tri dimenzije od kojih su dve(dimenzije poprečnog preseka), skoro uvek mnogo manje od treće. Zato se dimenzije poprečnog preseka obično zanemaruju a nosač zamišljamo kao liniju koja prolazi kroz težišta njegovih poprečnih preseka. Ovo je težišna linija ili osa nosača.

Greda je ravni i pravolinijski nosač koji ima potrebna ležajna pričvršćenja a može nositi bilo koje opterećenje. S obzirom na raspored i vrstu veza sa okolinom razlikujemo:

- prostu (jednostavnu) gredu
- gredu sa prepustima
- konzolu
- Gerberova greda ( je statički određen sistem zglobovima povezanih greda)



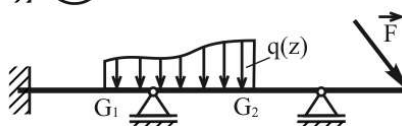
prosta greda



greda sa prepustima

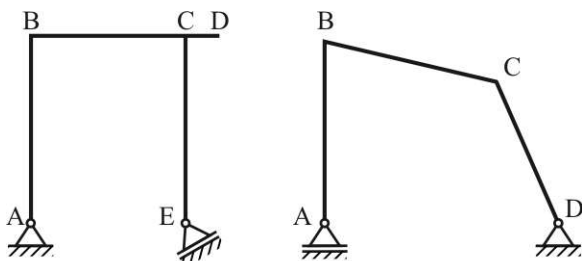


konzola



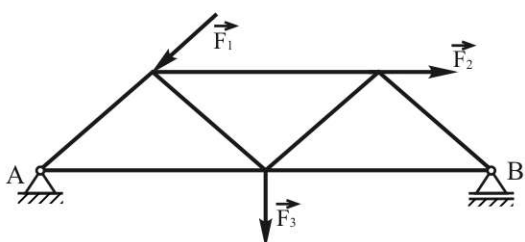
Gerberova greda predstavlja nosač sastavljen iz više nosača (greda konzola) povezanih gerberovim zglobovima.

Ovi nosači su oslonjeni na 2 ili više oslonaca.



Okviri nosači (ramovi) se sastoje od pravolinijskih delova. Na slici su prikazana 2 karakteristična slučaja. Prvi ram je pravougli jer se njegova težišna linija u tačkama B i C

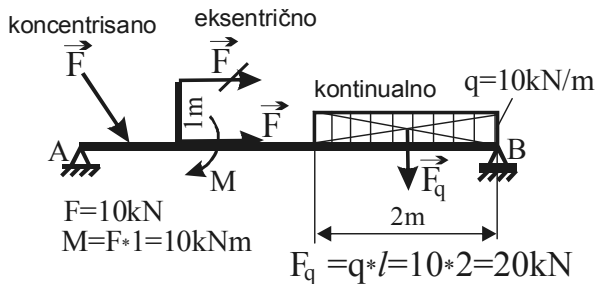
lomi pod pravim uglom. Kod drugog rama pravolinijski delovi lome se pod uglovima različitim od pravog.



Rešetka je kruta konstrukcija sastavljena od pravih štapova, koji su na svojim krajevima spojeni zglobovima. Ako svi štapovi rešetke leže u jednoj ravni rešetka je ravna, u suprotnom je prostorna.

## Vrsta opterećenja na nosaču

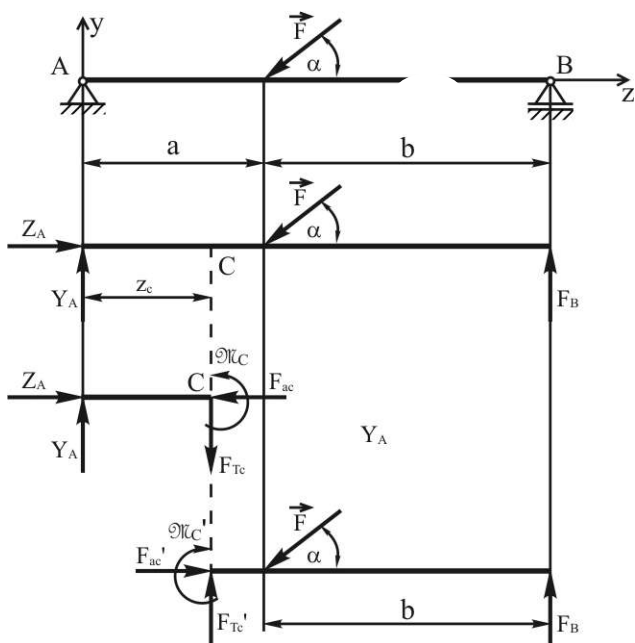
- koncentrisano opterećenje
- kontinualno opterećenje (konstantnog intenziteta kao na slici ili promenljivog intenziteta duž raspona nosača)
- ekscentrično ili posredno opterećenje



## Osnovne statičke veličine u poprečnom preseku nosača

(Unutrašnje sile i momenti)

Analiziraćemo ravnotežu proste grede koja opterećena prema prikazu na slici. Oslobodimo gredu veza a uticaj veza zamenimo silama. Greda se nalazi u ravnoteži pod dejstvom sile  $\vec{F}$  i ovih reakcija. Navedene sile: aktivne i reakcije veza nazivamo spoljašnjim silama. Ako gredu presečemo u tački C (preseku p-p) delovi grede AC i CB neće više biti u ravnoteži. Ako desni deo odvojimo za ravnotežu levog dela grede moraju se uzeti unutrašnje sile u poprečnom preseku, kojima delići odvojenog desnog dela deluju na deliće levog dela grede. Iz uslova ravnoteže delova grede određuju se veličine sile  $F_T(C)$  i  $F_a(C)$  koje sprečavaju kretanje u pravcu ose i upravno na osu grede. Sile  $F_T$  i  $F_a$  ne sprečavaju i rotaciju oko ose x (upravne na ravan zy). Dakle, u preseku C mora delovati i spreg momenta  $M$  suprotnog smeru i jednak po veličini momentu sile koje deluju na posmatrani deo grede. Za  $F_T$ ,  $F_a$  i  $M$  dobijaju se iste brojne vrednosti bez obzira



većini literature.

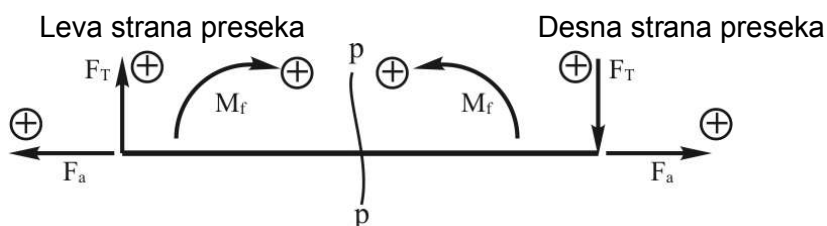
posmatra li se ravnoteža levog dela AC ili desnog CB ali su im smerovi suprotni - princip jednakosti akcije i reakcije. Napravimo li presek grede u nekoj drugoj tački naći ćemo iz uslova ravnoteže delova grede druge vrednosti za unutrašnje sile i moment.

- Transferzalna sila (poprečna) uravnotežuje komponente spoljašnjeg opterećenja čiji su pravci delovanja upravni na osu grede ( $\parallel$  osi y).

- Aksijalna sila (uzdužna) uravnotežuje komponente spoljašnjeg opterećenja koje su paralelne ili leže na osi grede (osa z).

- Moment savijanja drži ravnotežu momentima spoljašnjeg opterećenja, a veličina mu se određuje iz uslova ravnoteže ili levog ili desnog dela grede. Da bi se dobio isti znak pojedinih statičkih veličina pri računanju sa leve ili desne strane treba se pridržavati konvencije o znacima - koja se koristi za crtanje statičkih dijagrama u

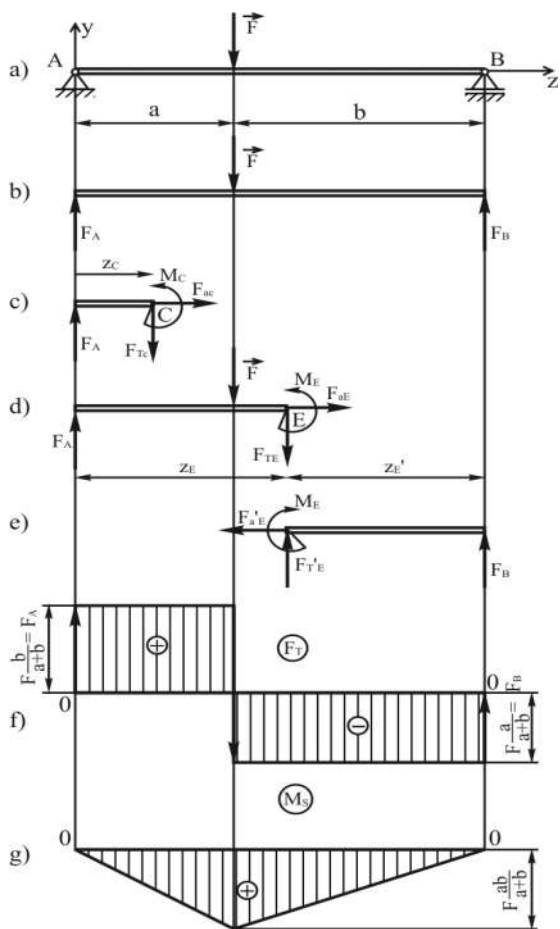
## Konvencije predznaka unutrašnjih veličina



Prema veličinama unutrašnjih sila i momenata određuju se dimenzije poprečnih preseka i to prema najvećim veličinama. Zato treba odrediti presek u kojem se pojavljuju najveće veličine unutrašnjih sila i momenata. Ovaj zadatak se rešava određivanjem dijagrama  $F_T$ ,  $F_a$  i  $M_f$ .

Dijagrami se crtaju analitičkim putem za sve tipove nosača i opterećenja - odrede se veličine  $F_T$ ,  $F_a$  i  $M_f$  za dovoljan broj preseka tako da se može nacrtati dijagram.

### Grede - određivanje unutrašnjih sila i momenata savijanja



- **Proste grede:**

- **Prosta greda opterećena koncentrisanom silom**

Posmatrajmo prostu gredu opterećenu sa koncentrisanom silom  $F$  upravno na osu grede. Na slici je prikazana ova greda oslobođena veza sa okolinom koje su nadomeštene reakcijama. Veličine ovih reakcija određene su iz uslova ravnoteže i iznose:

$$F_A = \frac{F \cdot b}{a + b} ; F_B = \frac{F \cdot a}{a + b} \dots\dots\dots(a)$$

Prikaz grede na slici b) je osnova za određivanje unutrašnjih sila i momenata savijanja. Treba istaknuti da smer reakcija veza mora na ovom prikazu biti onakav kakav ustvari jeste za razliku od proizvoljno odabranog u fazi određivanja reakcija.

Presećemo li gredu u tački C, udaljenoj za  $z_c$  od ležaja A, trebamo u tom preseku ucrtati veličine  $F_t$ ,  $F_a$  i  $M$  koje uravnotežavaju deo grede AC. Presek C predstavlja bilo koji presek između ležaja A i preseka D. Očigledno je  $F_{ac} = 0$ . Za određivanje transferzalne sile u preseku C posmatra se ravnoteža do preseka na levo, jer na ovom delu nosača deluje manji broj sila (samo  $F_A$ ). Izraz za transferzalnu silu u preseku  $z_c$  iznosi:

$$F_{TC} = F_A = \frac{F \cdot b}{a + b}$$

Vidi se da ova sila ne zavisi od položaja preseka C (rastojanja  $z_c$ ), što znači da sila ima konstantnu vrednost na dužini  $a$ . Dijagram sile je paralelna linija sa

apscisom. Za izračunavanje transferzalne sile za desni deo grede, greda se preseca u preseku E na udaljenosti  $z_E'$  od tačke B. U ovom slučaju se posmatra ravnoteža desnog dela grede, na koji deluje samo sila  $F_B$ . Izraz za transferzalnu silu u preseku  $z_E$  iznosi:  $F_{TE'} = -F_B = -\frac{F \cdot a}{a + b}$ . Ovaj

izraz takođe ne zavisi od položaja preseka E (rastojanja  $z_E'$ ) i ima konstantnu vrednost na dužini  $b$ . Posmatrajući levi deo grede od preseka E rezultat bi bio identičan:  $F_{TE} = F_A - F = -F_B$ . Iz dijagrama za  $F_T$  se vidi skok na mestu delovanja sile  $F$ , veličina skoka jednaka je intenzitetu sile  $F$ .

Moment savijanja u preseku C jednak je sumi momenata svih vertikalnih sila, koje deluju levo od preseka i iznosi:

$$M_C = F_A \cdot z_C = \frac{F \cdot b}{l} \cdot z_C.$$

Relacija izražava zakon promene momenta u prvom polju grede ( $0 \leq z_c \leq a$ ), koji je linearan. Za rastojanja  $z > a$ , na levi deo grede deluju dve sile ( $F_A$  i  $F$ ) pa gornja relacija ne važi. Pošto se  $M_C$  menja linearno dovoljno je uzeti dve vrednosti:

$$M_s(z_c = 0) = M_s(A) = 0$$

$$M_s(z_c = a) = \frac{F \cdot a \cdot b}{a + b} - \text{što je vrednost momenta savijanja u tački gde deluje sila } F.$$

Za desni deo grede jednačina promene momenta savijanja ima oblik:

$$M_s(E) = F_B \cdot z_E = \frac{F \cdot a}{a + b} \cdot z_E - \text{jednačina prave,}$$

$$M_s(z_E = 0) = M_s(B) = 0$$

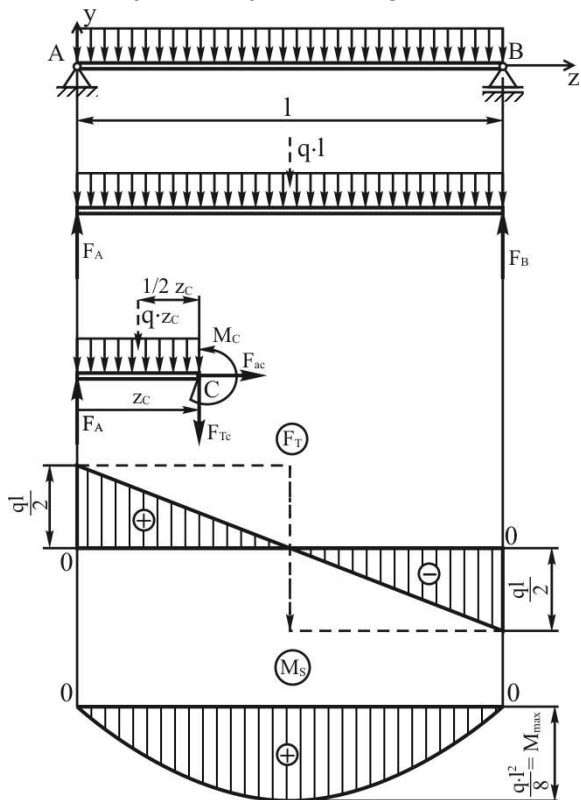
$$M_s(z_E = b) = \frac{F \cdot a \cdot b}{a + b} - \text{što je vrednost momenta savijanja na mestu dejstva sile.}$$

Vidi se da moment savijanja u svim presecima ima pozitivne vrednosti pa se crta ispod apscise, kako je na slici pokazano. Maksimalna vrednost momenta savijanja je u tački delovanja sile F i ima vrednost:

$$M_{\max} = \frac{F \cdot a \cdot b}{a + b}.$$

### Prosta greda opterećena kontinualnim opterećenjem konstantnog intenziteta

U slučaju kada je prosta greda opterećena konstantnim kontinualnim opterećenjem  $q$  njene



reakcije veza su  $F_A = F_B = \frac{ql}{2}$

Presečno li gredu u tački C ( $0 \leq z_C \leq l$ ) uslovi ravnoteže dela AC glase:

$$F_{aC} = 0$$

$$F_A - q \cdot z_C - F_{TC} = 0$$

$$-M_C + F_A \cdot z_C - q \cdot z_C \cdot \frac{z_C}{2} = 0$$

Za izračunavanje momenta dela kontinualnog opterećenja koji deluje na deo AC zamenjeno je ovo opterećenje koncentrisanom silom veličine  $q \cdot z_C$  a koja deluje na polovini dužine  $z_C$

$$F_{aC} = 0$$

$$F_{TC} = q \left( \frac{l}{2} - z_C \right)$$

$$M_C = \frac{1}{2} q (z_C \cdot l - z_C^2)$$

Ovi izrazi određuju unutrašnje sile  $F_T$  i  $M_s$  za bilo koji presek grede ako  $z_C$  ima vrednosti od 0 do l.  $F_T$  se

menja linearno po dužini grede i ima tri karakteristične vrednosti za:

$$z_C = 0 \rightarrow F_T = \frac{ql}{2}$$

$$z_C = \frac{l}{2} \rightarrow F_T = 0$$

$$z_C = l \rightarrow F_T = -\frac{ql}{2}$$

Veličina:  $M_f$  zavisi od položaja preseka i ima 3 karakteristične vrednosti

$$z_C = 0 \rightarrow M_C = 0$$

$$z_C = \frac{l}{2} \rightarrow M_C = M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

$$z_C = l \rightarrow M_C = 0$$

U preseku u kome je  $F_T = 0$ ,  $M_s$  ima najveću vrednost.

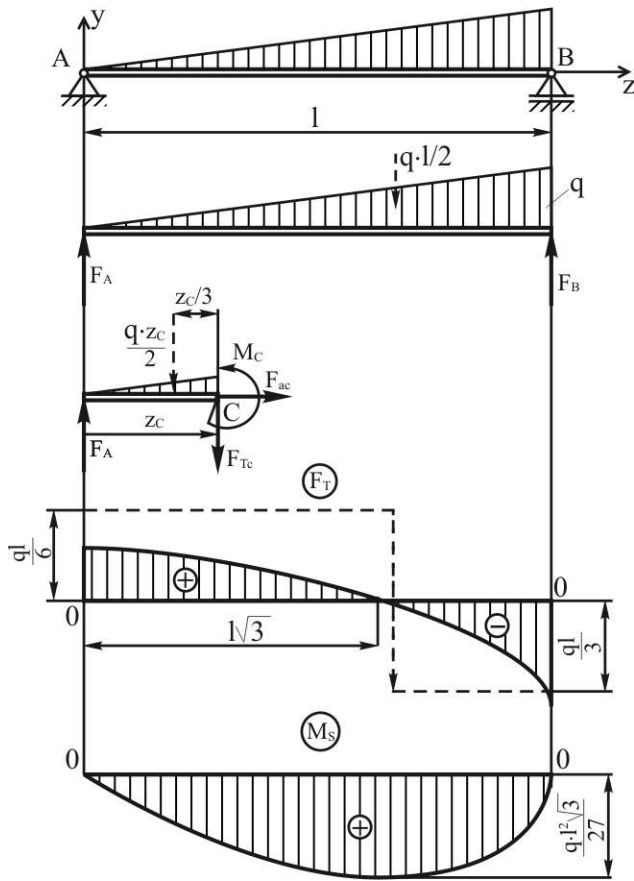
### Prosta greda opterećena kontinualnim opterećenjem čiji se intenzitet menja linearno po dužini raspona

Specifično opterećenje  $q = 0$  nad osloncem A a ima najveću vrednost nad osloncem B. Za određivanje reakcije veza zamenjujemo ovo kontinualno opterećenje koncentrisanom silom

$F_q = \frac{ql}{2}$  koja deluje na udaljenosti  $l/3$  od oslonca B (u težištu trougla kontinualnog opterećenja).

Veličine reakcija veza iznose:

$$F_A = \frac{ql}{6}; \quad F_B = \frac{ql}{3}.$$



Presečemo gredu u tački C uslovi ravnoteže za deo AC grede su:

$$F_{ac} = 0$$

$$-F_{TC} - \frac{q_C z_C}{2} + F_A = 0$$

$$F_A z_C - \frac{q_C z_C}{2} \cdot \frac{1}{3} z_C - M_C = 0$$

Veličina  $q_C$  određuje se iz proporcije

$$\frac{q}{l} = \frac{q_C}{z_C} \Rightarrow q_C = q \frac{z_C}{l}$$

Unutrašnje sile ( $F_a$ ,  $F_T$  i  $M_S$ ) u preseku C (bilo koji presek grede od 0 do  $l$ :  $0 \leq z_C \leq l$ ) iznose:

$$F_{ac} = 0$$

$$F_{TC} = \frac{ql}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{z_C^2}{l^2} \right)$$

$$M_C = \frac{ql^2}{6} \left( \frac{z_C}{l} - \frac{z_C^3}{l^3} \right)$$

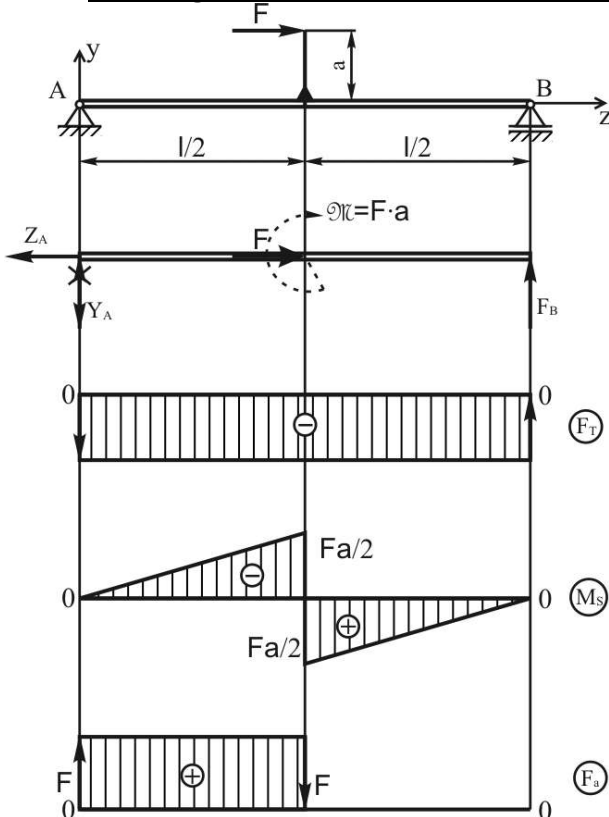
Karakteristične veličine za  $F_T$  i  $M_f$ :

$$z_C = 0 \Rightarrow F_{TC} = \frac{ql}{6} = F_A \quad \text{i} \quad M_C = 0$$

$$z_C = \frac{l}{\sqrt{3}} \Rightarrow F_{TC} = 0 \quad \text{i} \quad M_C = M_{\max} = \frac{ql^2 \sqrt{3}}{27}$$

$$z_C = l \Rightarrow F_{TC} = -\frac{ql}{3} = -F_B \quad \text{i} \quad M_C = 0$$

### Prosta greda opterećena ekscentričnom silom



Uslovi ravnoteže:

$$1. \sum Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + F = 0$$

$$2. \sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + F_B = 0$$

$$3. \sum M_A = 0 \Rightarrow F_B \cdot l - F \cdot a = 0$$

$$Z_A = F(\leftarrow); \quad F_B = F \frac{a}{l}(\uparrow); \quad \left( F_A = -F \frac{a}{l} \right)$$

$$F_A = F \frac{a}{l}(\downarrow)$$

$$M_A = 0$$

$$M_f^l(z = l/2 - \varepsilon) = -Y_A \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Fa}{l} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Fa}{2}$$

$$M_f^l(z = l/2 + \varepsilon) = -Y_A \cdot \frac{l}{2} + Fa = \frac{Fa}{2}$$

$$M_f^d(z = l/2 - \varepsilon) = F_B \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fa}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fa}{2} = M_f^l(z = l/2 + \varepsilon)$$

$$M_B = 0$$



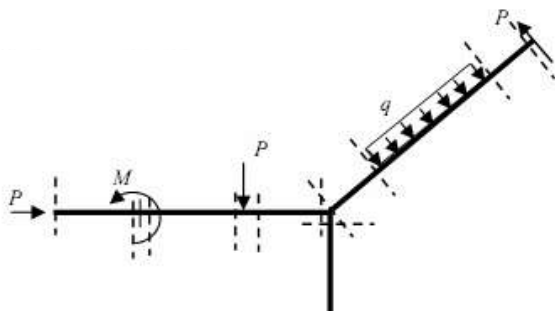
## Objašnjenje dijagrama

Unutrašnje sile u presecima predstavljaju ukupnu silu kojom u jednom preseku jedan deo grede deluje na drugi tj. zamenjuju odbačeni deo grede na posmatrani (uravnotežuju deo grede koji posmatramo). Unutrašnje sile računaju se u karakterističnim presecima:

- gredu možemo preseći bilo gde tj. gde god nam je potrebno
- unutrašnje veličine možemo računati na oba dela i pokazati da rešenja moraju biti ista
- kada izračunamo sve potrebne veličine možemo crtati dijagrame.

Karakteristični preseci su:

- početak i kraj grede, promena pravca grede
- početak i kraj kontinualnog opterećenja
- ispred i iza delovanja koncentrisane sile i koncentrisanog sprega



Između karakterističnih tačaka koristimo diferencijalne odnose za crtanje dijagrama:

$$\frac{dM(z)}{dz} = F_T(z) - \text{Transferzalna sila je jednaka izvodu napadnog momenta po apscisi } z. \text{ Iz}$$

matematike je poznato ako neka funkcija ima prvi izvod jednak nuli za neku vrednost argumenta, onda ta funkcija ima ekstremnu vrednost za tu vrednost argumenta. Ovo znači da u preseku u kome je transferzalna sila jednaka nuli moment savijanja ima ekstremnu vrednost, u poljima gde je  $F_T$  pozitivno moment raste, a gde je  $F_T$  negativno moment pada.

$$\frac{dF_T(z)}{dz} = -q(z) - \text{Veličina kontinualnog opterećenja jednaka je negativnoj vrednosti tangensa}$$

ugla koji zaklapa tangenta na  $F_T$ -dijagramu sa osom  $z$ .

Dijagrami unutrašnjih sila su grafički prikazi promena unutrašnjih sila uzduž elementa sistema.

Dijagram aksijalnih sila-  $F_a$

- uzdužna sila može biti zatežuća ili pritiska
- po konvenciji: zatežuća sila je pozitivna (+) crtamo ih gore, a pritiska negativna (-) crtamo ih dole
- na dijagram  $F_a$  utiču smo uzdužna opterećenja (u pravcu ose grede), pa je dijagram aksijalnih sila potpuno nezavistan od dijagrama  $M$  i  $F_T$ .
- koncentrisana sila duž ose uzrokuje skok u  $F_a$  dijagramu, a između sila dijagram je konstantan.

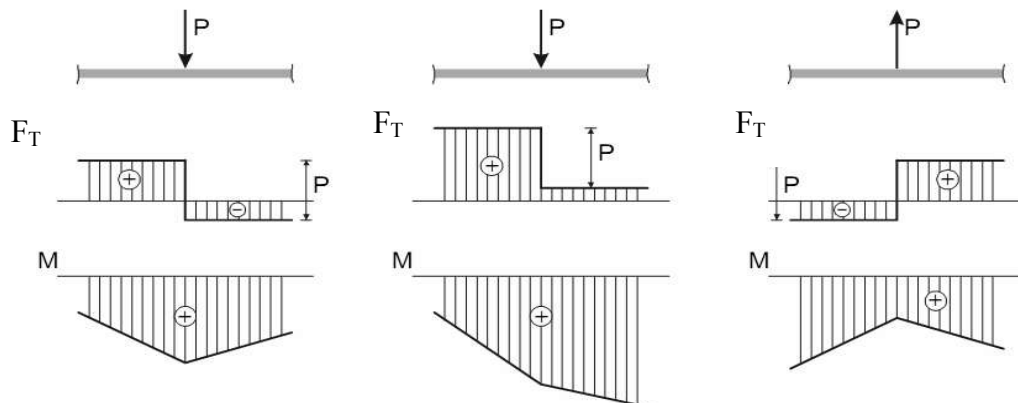
Dijagram transferzalnih sila ( $F_T$ ) i momenata savijanja ( $M_s$  ili  $M_f$ ), (f- fleksija)

- Prema konvenciji pozitivne vrednosti transversalnih sila nanosimo iznad nulte linije dijagrama  $F_T$ . Na isti način pozitivne vrednosti  $M_f$ -dijagrama nanosimo ispod nulte linije.

Na dijagram transferzalnih sila utiču poprečna opterećenja ( $P$  i  $q$  (upravna na osu grede)) .

Na dijagram momenata savijanja utiču poprečna opterećenja i koncentrisani momenti ( $P$ ,  $q$  i  $M$ )

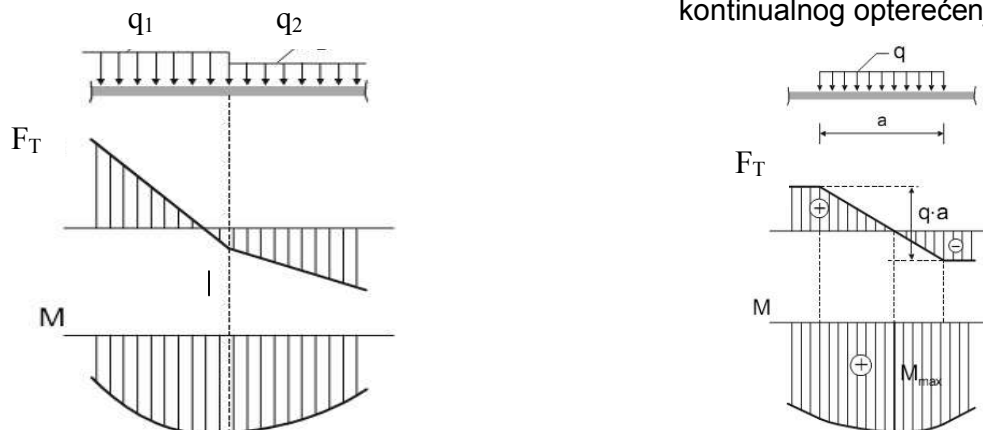
- Skok u dijagramu transferzalnih (poprečnih) sila pojavljuje se samo na mestu delovanja koncentrisane poprečne sile, između je dijagram konstantan. Na tom mestu u dijagramu momenata savijanja pojavljuje se „lom“, linearni pad ili rast dijagrama a u zavisnosti od veličine sile menja se nagib pravca (veća sila strmiji pravac).



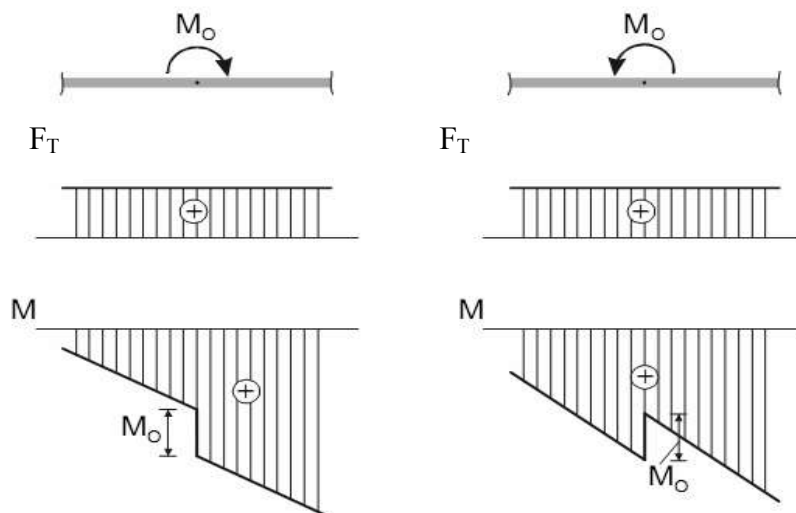
- Kontinualno opterećenje uzrokuje linearan pad ili rast poprečne sile zavisno od smera opterećenja

- Lom u dijagramu poprečnih sila pojavljuje se samo na mestu na kome se menja intenzitet kontinualnog opterećenja. Kontinualno opterećenje upravno na osu grede – daje parabolu u M – dijagramu, zavisno od veličine opterećenja menja se karakteristika parabole.

U području konstantnog vertikalnog kontinualnog opterećenja ( $q = \text{const}$ )



Skok u dijagramu momenata savijanja pojavljuje se samo na mestu gde deluje koncentrisani moment, a između sila dijagram je linearan (nagib levo i desno od preseka je jednak)



Očigledno je da su dijagrami  $F_T$  i  $M$  medusobno zavisni.

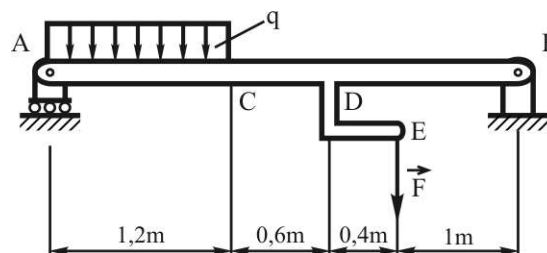
Dijagrami:

$M$	$F_T$
parabola	linearan
linearan	konstantan
konstantan	nema

### PRIMERI

**Primer 1.** Za gredu opterećenu ekscentričnom silom  $F$  i kontinualnim opterećenjem  $q$ , pri čemu je: specifično opterećenje  $q = 4 \text{ kN/m}$ ,  $F = 4 \text{ kN}$ , potrebno je:

- odrediti otpore oslonaca (reakcije  $F_A$ ,  $F_B$ )
- skicirati i kotirati dijagrame transferzalnih sila
- skicirati i kotirati dijagrame momenata savijanja ( $M_s$ ) sa svim ekstremnim vrednostima.



Otpori oslonaca:  $Z_B = 0$

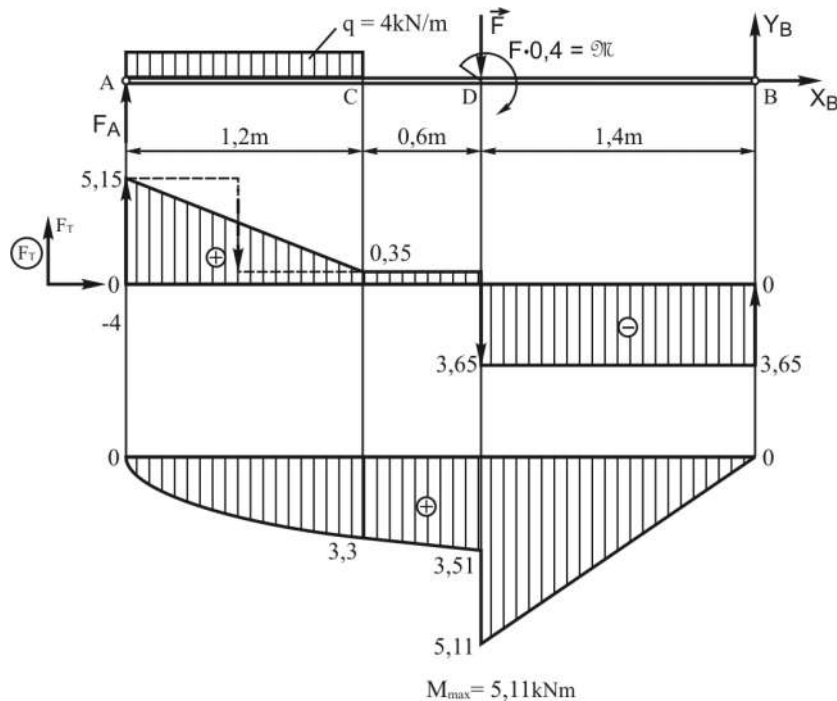
$$1. \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A - \overbrace{q \cdot 1,2}^{Fq} - F + Y_B = 0$$

$$2. \sum M_A = 0 \Rightarrow -q \cdot 1,2 \cdot 0,6 - F \cdot 1,8 - \underbrace{1,6}_{\bar{M}} + Y_B \cdot 3,2 = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 3,2 = 2,88 + 7,2 + 1,6 \rightarrow Y_B = 3,65 \text{ kN}$$

$$1 \Rightarrow F_A + Y_B = 4,8 + 4 \rightarrow F_A = 8,8 - 3,65 \rightarrow F_A = 5,15 \text{ kN}$$

Momenti savijanja:  $M_{s(A)} = 0$      $\uparrow M_{s(C)}^l = F_A \cdot 1,2 - 4 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = 3,3 \text{ kNm}$      $M_{s(B)} = 0$

$$\uparrow M_{s(D)}^{l-\varepsilon} = F_A \cdot 1,8 - 4 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 3,51 \text{ kNm} \quad \uparrow M_{s(D)}^{l+\varepsilon} = M_{s(D)}^{l+\varepsilon} + M = 3,51 + 1,6 = 5,11 \text{ kNm}$$



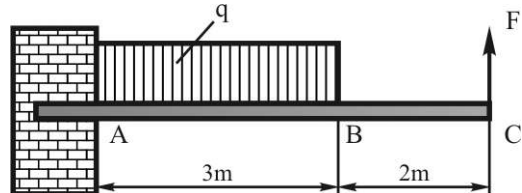
**Primer 2.** Nosač ukupne dužine 5 m uklješten je u tački A. Potrebno je analitičkim putem odrediti:

a) otpore oslonca A.

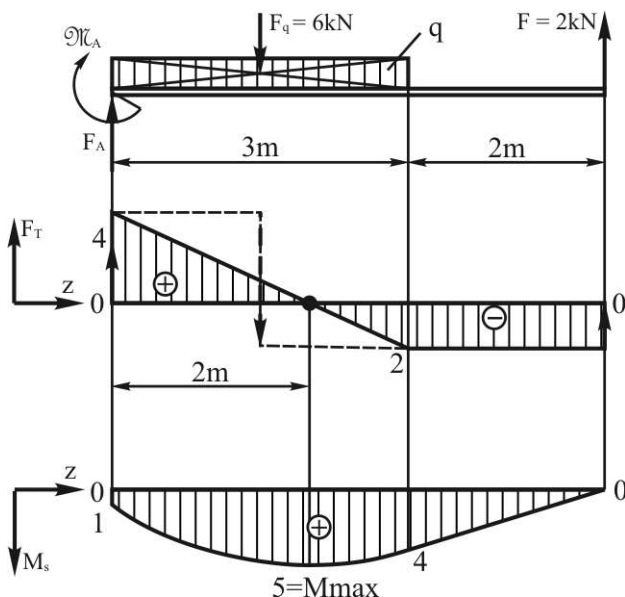
Skicirati i kotirati dijagrame:

b) transferzalnih sila

c) momenata savijanja i odrediti njegovu maksimalnu vrednost



$$F_q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kN}$$



Otpori oslonca:

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A - F_q + F = 0$$

$$F_A = 6 - 2 = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 6 \cdot 1,5 + 10 = 0$$

$$M_A = -9 + 10 = 1 \text{ kNm}$$

$$M_A = 1 \text{ kNm}$$

Momenti savijanja:

$$M_{s(z=2m)}^l = F_A \cdot 2 + M_A - 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$M_{s(z=2m)} = 8 + 1 - 4 = 5 \text{ kNm}$$

**Primer 3.** Za kombinovano opterećenu gredu sa prepustom prema slici, odrediti reakcije u osloncima i nacrtati dijagrame transferzalnih sila i momenata savijanja, detaljnim ispitivanjem svakog polja. Vrednosti pojedinih opterećenja su:  $F=2\text{kN}$ ,  $q=1\text{kN/m}$  i  $M=4\text{kNm}$

Rešenje: Na posmatranu gredu deluje paralelni sistem sila. Pasivne sile (reakcije veza)  $F_A$  i  $F_B$  odredićemo iz jednačina ravnoteže:

$$F_q = q \cdot l = 1 \cdot 6 = 6\text{kN}$$

$$1. \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B = F + F_q \Rightarrow F_A + F_B = 8\text{kN}$$

$$2. \sum M_B = 0 \Rightarrow M - F_A \cdot 6 + F \cdot 4 - F_q \cdot 1 = 0 \Rightarrow F_A = 3\text{kN}$$

$$1. \Rightarrow F_B = 5\text{kN}$$

Proračun unutrašnjih sila i momenata u pojedinim poljima grede (polje grede je deo grede gde nema nekih karakterističnih promena opterećenja-koncentrisanih sila, spregova, ekscentričnih opterećenja i sl.)

Koordinatom  $z$  definišaćemo položaj preseka u nekom polju.

polje AC:  $0 \leq z_1 \leq 2\text{m}$

$$F_T^l(z_1) = F_A = 3\text{kN} = \text{const}$$

$$M_S^l(z_1) = -M + F_A \cdot z = -4 + 3 \cdot z$$

zakon promene momenta

$$M_S^l(z_1 = 0) = -4\text{kNm};$$

$$M_S^l(z_1 = 2\text{m}) = 2\text{kNm}$$

polje CB:  $0 \leq z_2 \leq 4\text{m}$

$$F_T^l(z_2) = Y_A - F - q \cdot z_2 = 1 - z_2$$

$$M_S^l(z_2) = -M + Y_A(2 + z_2) - F \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} = 2 + z_2 - \frac{z_2^2}{2}$$

$$F_T^l(z_2) = 0 \Rightarrow 1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 1\text{m}$$

$$M_S^l(z_2 = 1\text{m}) = 2 + 1 - \frac{1}{2} = 2.5\text{kNm}$$

$$M_S^l(z_2 = 4\text{m}) = M_S^l(B) = -2\text{kNm}$$

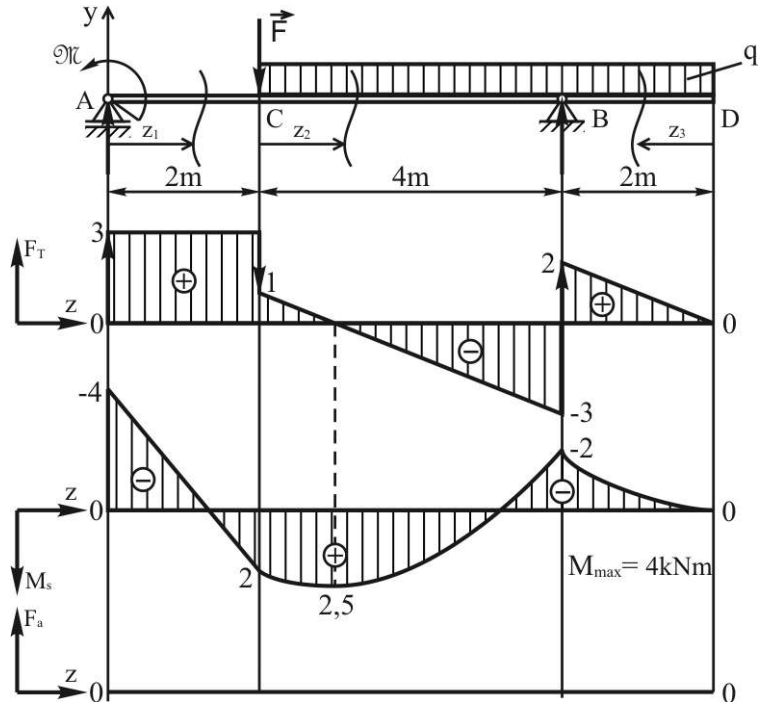
Polje BD:  $0 \leq z_3 \leq 2\text{m}$

$$F_T^d(z_3) = q \cdot z_3 = 1 \cdot z_3$$

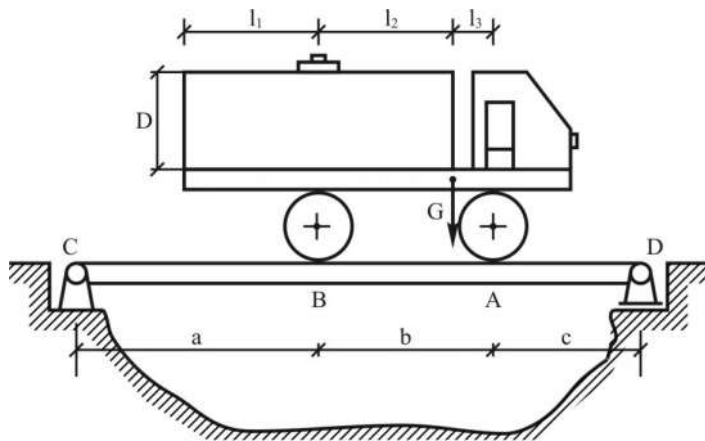
$$M_S^d(z_3) = -q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} = -\frac{z_3^2}{2}$$

za  $z_3 = 0 \Rightarrow F_T = 0$  i  $M_S = 0$  - tačka D, a za  $z_3 = 2\text{m} \Rightarrow F_T = 2\text{kN}$  i  $M_S = -2\text{kNm}$  - tačka B

$$M_S^l(B) = M_S^d(B)$$



### Primer 4. Kontinualno-posredno opterećenje



Kamion - cisterna sa mazutom

$D [m]$  - prečnik cisterne

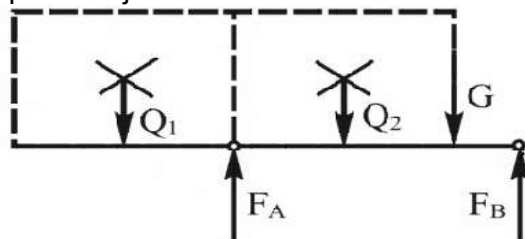
$l_1, l_2, l_3 [m]$

$a, b, c [m]$

$G [N]$  - Težina kamiona- cisterne

$\rho_m [kg/m^3]$  -specifična težina mazuta

Mazut u cisterni predstavlja kontinualno opterećenje:



$$Q_1 = m_1 \cdot g = (\rho_m \cdot V_1) \cdot g = (\rho_m \cdot D^2 \pi / 4) \cdot l_1 \cdot g [N]$$

$$Q_2 = m_2 \cdot g = (\rho_m \cdot V_2) \cdot g = (\rho_m \cdot D^2 \pi / 4) \cdot l_2 \cdot g [N]$$

Uslovi ravnoteže:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow -Q_1 + F_A - Q_2 + F_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_S \cdot b - G \cdot l_2 - Q_2 \cdot l_2 / 2 - Q_1 \cdot l_1 / 2 = 0$$

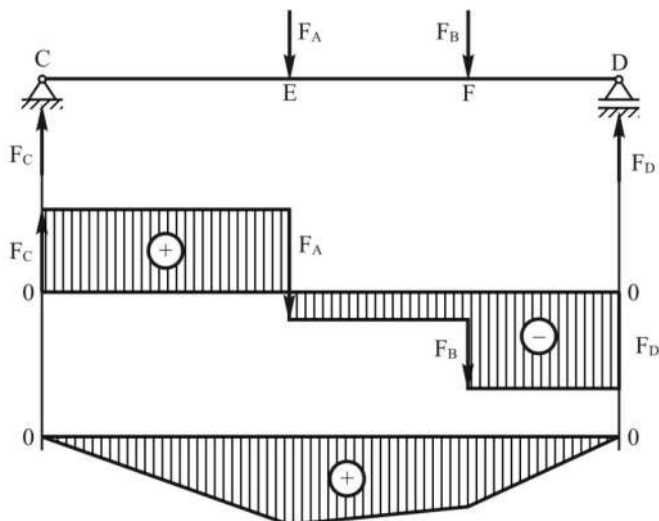
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} F_A \\ F_B \end{array}$$

Uslovi ravnoteže:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow F_C - F_A - F_B + F_D = 0$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow F_D \cdot (a+b+c) - F_B \cdot (a+b) - F_A \cdot a = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} F_C \\ F_D \end{array}$$



• Transferzalne sile:

$$F_T(C) = F_C, \quad F_T^{l-\varepsilon}(E) = F_C,$$

$$F_T^{l+\varepsilon}(E) = F_C - F_A,$$

$$F_T^{l-\varepsilon}(F) = F_C - F_A,$$

$$F_T^{l+\varepsilon}(F) = F_C - F_A - F_B$$

$$F_T(D) = F_D$$

• Momenti savijanja:

$$M_{S(C)} = 0, \quad M_{S(E)} = F_C \cdot a$$

$$M_{S(F)} = F_D \cdot c, \quad M_{S(D)} = 0$$

### Zglobno sastavljene grede - Gerberove grede

Na primeru zglobno sastavljenih greda razmatraćemo problematiku određivanja reakcije veza, unutrašnjih sila i momenata savijanja sistema punih nosača. Pretpostavimo da trebamo premostiti raspon od A do E ali tako da postoje oslonci u A, B, C i D.



Takva greda bila bi dva puta statički neodređena. Ali ako gredu presečemo u  $G_1$  i  $G_2$  i spojimo je sa cilindričnim zglobovima, ona će:

- biti i dalje u ravnoteži
- kako zglobovi ne mogu preuzeti momente dobili smo dva dodatna uslova ravnoteže:

$$\sum M_{G_1} = 0; \quad \sum M_{G_2} = 0$$

pomoću kojih možemo odrediti dve prekobrojne nepoznate reakcije veza.

Dakle, Gerberova greda je statički određen sistem zglobovima povezanih greda.

**Primer1.** Za Gerberovu gredu, zadatu i opterećenu prema slici odrediti reakcije veza, poprečne sile i momente savijanja. Dato je:  $F = 2kN$  i  $q = 1kN/m$ .

Sistem sila koje deluju na posmatrani nosač je paralelan pa imamo 2 statička uslova ravnoteže, za konstrukciju kao celinu nepoznatih imamo 3. Treću j-nu za dobijanje traženih otpora oslonaca dobijamo iz uslova da je moment savijanja u Gerberu = 0.

$$1. \sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + F_B - q \cdot l - F = 0 \Rightarrow Y_A = 0$$

$$2. \sum M_A^{F_i} = 0 \Rightarrow -M_A - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + F_B \cdot 4 - F \cdot 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A = 2kNm$$

$$3. \sum M_G^d(F_i) = 0 \Rightarrow F_B \cdot 2 - F \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

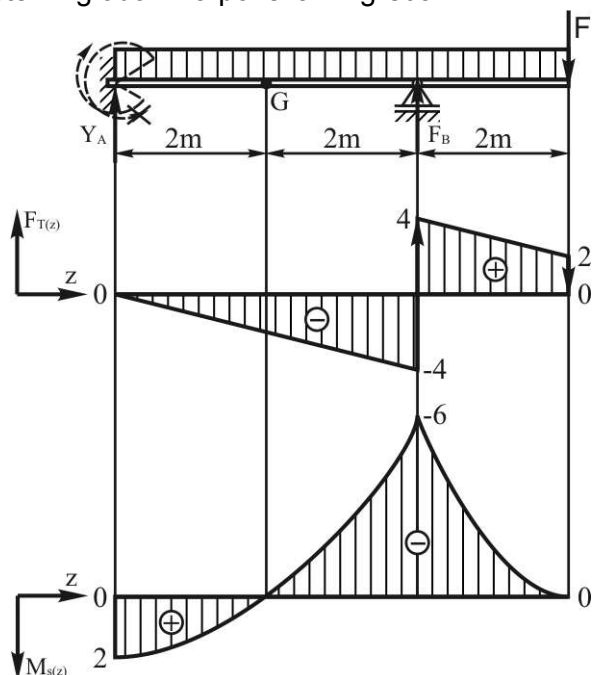
$$\Rightarrow F_B = 8kN$$

Moment savijanja u preseku z:

$$M(z) = M_A - q \cdot z \cdot \frac{z}{2}$$

$$M(z=0) = 2kNm$$

$$M(z=2) = M_G = 0$$



**Primer 2.** Za dati Gerberov nosač, sa dva zgloba  $G_1$  i  $G_2$ , uklješten krajem A i oslonjen u tačkama B i C, analitičkim putem odrediti otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame ( $M_f$ ,  $F_{tr}$  i  $F_a$ ). Opterećenje grede je:  $F_1 = 2kN$ ,  $F_2 = \sqrt{2}kN$ ,  $q = 1kN/m$ ,  $M = 1kNm$ .

Gerberova greda, oslobođena spoljašnjih veza u tačkama A, B i C ima 5 nepoznatih reakcija veza:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$ ,  $F_B$  i  $F_C$ . Da bismo ih odredili potrebno nam je 5 jednačina, a raspoložemo sa samo 3 uslova ravnoteže. Dva dopunska uslova ravnoteže daju nam 2 Gerberova zgloba. Kada se ispisuje momentna jednačina za Gerberov zglob možemo uzeti sumu momenata od svih opterećenja sa leve ili desne strane zgloba. Preporuka je da se uzima sa one strane sa koje imamo manji broj nepoznatih reakcija veza i manji broj poznatih aktivnih opterećenja.

Jednačine ravnoteže konzole:

$$1. \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

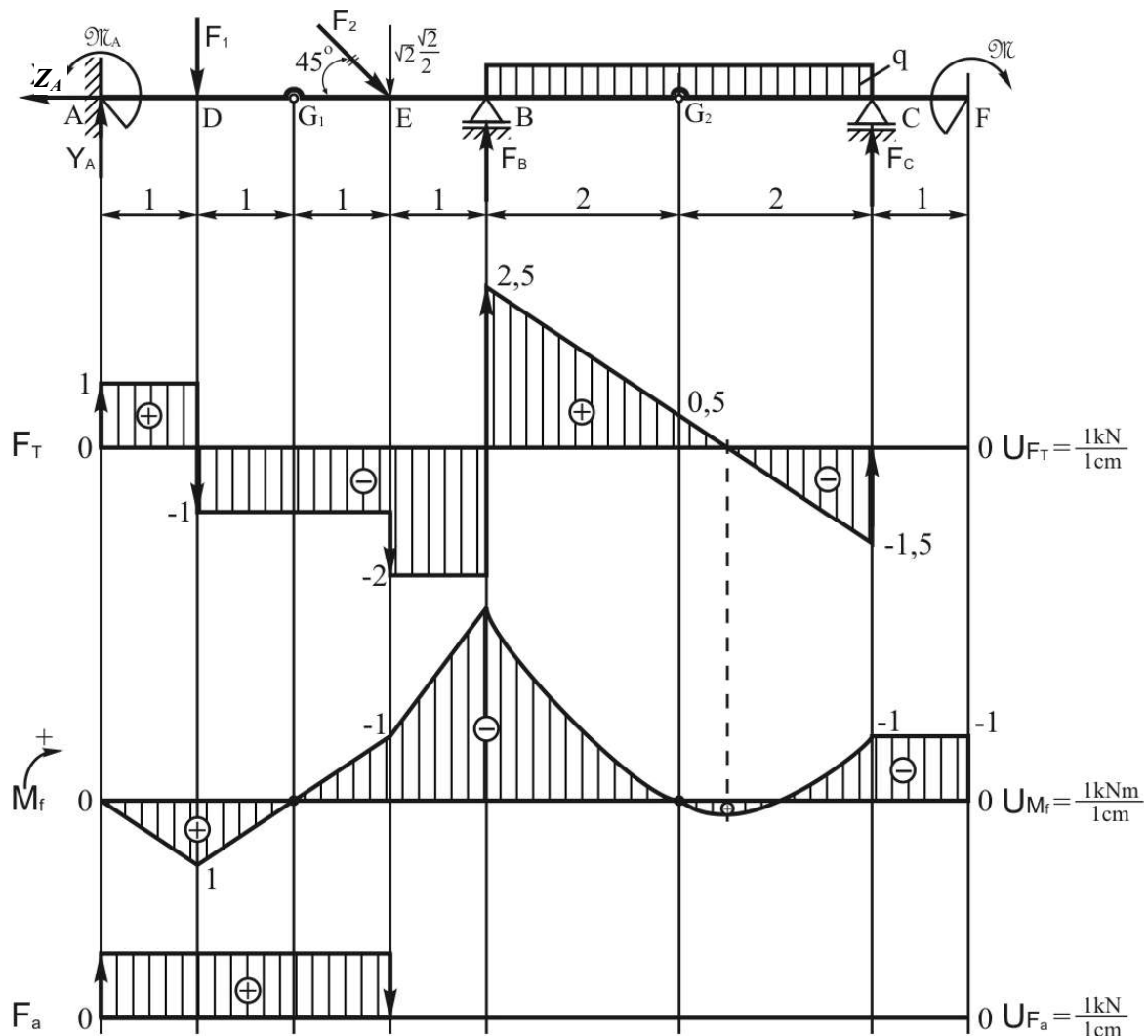
$$2. \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + F_B + F_C - F_1 - F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - q \cdot 4 = 0$$

$$3. \sum M_{G_2}^d = 0 \Rightarrow F_C \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - M = 0$$

$$4. \sum M_{G_1}^d = 0 \Rightarrow F_B \cdot 2 - F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 4 + F_C \cdot 6 - M = 0$$

$$5. \sum M_{G_1}^l = 0 \Rightarrow M_A - Y_A \cdot 2 + F_1 \cdot 1 = 0$$

Rešavanjem jednačina dobija se:  $Z_A = 1kN(\leftarrow)$ ,  $F_C = 1.5kN(\uparrow)$ ,  $F_B = 4.5kN(\uparrow)$ ,  $Y_A = 1kN(\uparrow)$ ,  $M_A = 0$ .



Transferralne sile u karakterističnim presecima:

Momenti savijanja u karakterističnim presecima

$$F_T^d(z) = -F_C + q \cdot z = -1.5 + z;$$

$$F_T^{d+\varepsilon}(z=0) = -1.5 \text{ kN};$$

$$F_T^d(z=2\text{m}) = 0.5 \text{ kN};$$

$$F_T^d(z=4\text{m}) = 2.5 \text{ kN}$$

$$F_T^d(z) = 0 \Rightarrow z - 1.5 = 0 \Rightarrow z = 1.5 \text{ m}$$

$$M_D^l = Y_A \cdot 1 = 1 \text{ kNm}$$

$$M_{G_1}^l = Y_A \cdot 2 - F_1 \cdot 1 = 0$$

$$M_E^l = Y_A \cdot 3 - F_1 \cdot 2 = -1 \text{ kNm}$$

$$M_B^l = Y_A \cdot 4 - F_1 \cdot 3 - Y_2 \cdot 1 = -3 \text{ kNm}$$

$$M^d(z) = -M + F_C \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -\frac{z^2}{2} + 1.5z - 1$$

$$M^d(z=1.5\text{m}) = -\frac{(1.5)^2}{2} + 1.5 \cdot 1.5 - 1 = 0.125 \text{ kNm}$$

### Okvirni nosači

**Primer 1.** Za okvirni nosač (ram) prema slici i za date brojne podatke:  $F = 1 \text{ kN}$  i  $q = 1 \text{ kN/m}$ .

a) odrediti analitičkim putem reakcije ukleštenja A i oslonca B,

b) nacrtati sve statičke dijagrame.

$$Q_1 = q \cdot 2 = 2 \text{ kN}, \quad Q_2 = q \cdot 4 = 4 \text{ kN}$$

Jednačine ravnoteže:

$$1. \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + Q_1 - F + F + F = 0 \Rightarrow Z_A = 3 \text{ kN}$$

$$2. \sum M_G^d = 0 \Rightarrow F_B \cdot 2 + F \cdot 3 - F \cdot 3 - F \cdot 1 + F \cdot 1 = 0 \Rightarrow F_B = 0$$

$$3. \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - Q_2 + F - F = 0 \Rightarrow Y_A = 4 \text{ kN}$$

$$4. \sum M_G^l = 0 \Rightarrow M_A - Y_A \cdot 2 - Z_A \cdot 4 + Q_1 \cdot 3 - F \cdot 1 + Q_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_A = 7 \text{ kNm}$$

Konzola AC:

$$F_T^l(A) = Z_A = 3kN$$

$$F_T^l(y) = Z_A - q \cdot y = 3 - y$$

$$F_T^l(y = 1m) = 2kN$$

$$F_T^l(y = 2m) = 1kN$$

$$M_A^l = -M_A = -7kNm$$

$$M^l(y) = -M_A + Z_A \cdot y - q \cdot y \cdot \frac{y}{2} = -\frac{y^2}{2} + 3y \quad M^l(y = 1m) = -4.5kNm, \quad M^l(y = 2m) = -3kNm$$

$$M_E^l = -M_A + Z_A \cdot 3 - Q_1 \cdot 2 = -2kN$$

$$M_C^l = -M_A + Z_A \cdot 4 - Q_1 \cdot 3 + F \cdot 1 = 0$$

Greda CD:

$$F_T^{l-\varepsilon}(C) = -q \cdot 2 = -2kN$$

$$F_T^{l+\varepsilon}(C) = -q \cdot 2 + Y_A = 2kN$$

$$F_T^l(G) = -Q_2 + Y_A = 0$$

$$M^{l-\varepsilon}(C) = -q \cdot 2 \cdot 1 = -2kNm$$

$$M_D^{d-\varepsilon} = -F \cdot 1 = -1kNm$$

$$M_D^{d+\varepsilon} = -F \cdot 1 - F \cdot 1 + F \cdot 3 = 1kNm$$

$$M_H^d = -F \cdot 1 + F \cdot 1 + F \cdot 3 - F \cdot 3 = 0$$

Sa dijagrama se može zaključiti sledeće:

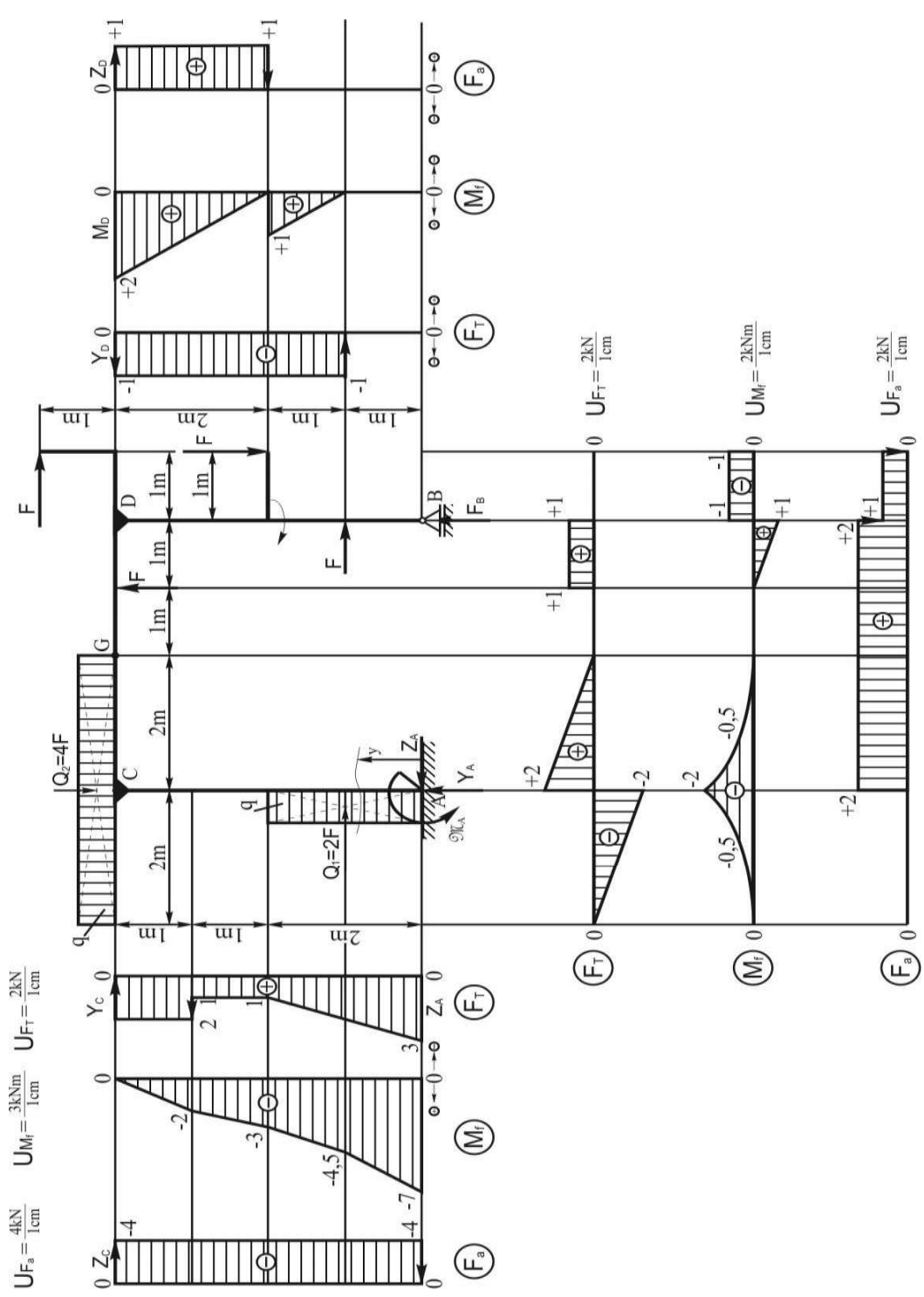
- Transferzalna sila na gredi AC u tački C jednaka je skoku aksijalne sile na gredi CD u istoj tački C,
- Aksijalna sila na gredi AC u tački C jednaka je skoku transferzalne sile na gredi CD u istoj tački C,
- Moment savijanja na gredi AC u tački C jednak je skoku momenta savijanja na gredi CD u istoj tački C.

U slučaju da je glavna greda bez prepusta onda važi sledeće:

- Aksijalna sila na stubovima u tački vezivanja jednaka je transferzalnoj sili za glavnu u istoj tački
- Transferzalna sila na stubovima u tački vezivanja jednaka je aksijalnoj sili za glavnu gredu u istoj tački

Moment savijanja na stubovima jednak je po intenzitetu momentu savijanja za glavnu gredu u tački vezivanja.





## Opšti slučaj opterećenja grede

### Definicija unutrašnjih sila i momenata

U slučaju kada sile spoljašnjeg opterećenja grede leže u jednoj ravni u poprečnim preseccima grede pojavljuju se: uzdužne i poprečne sile i moment savijanja. Presećemo li gredu tada bi svaki deo grede imao tri stepena slobode kretanja, u ravni spoljašnjeg opterećenja:

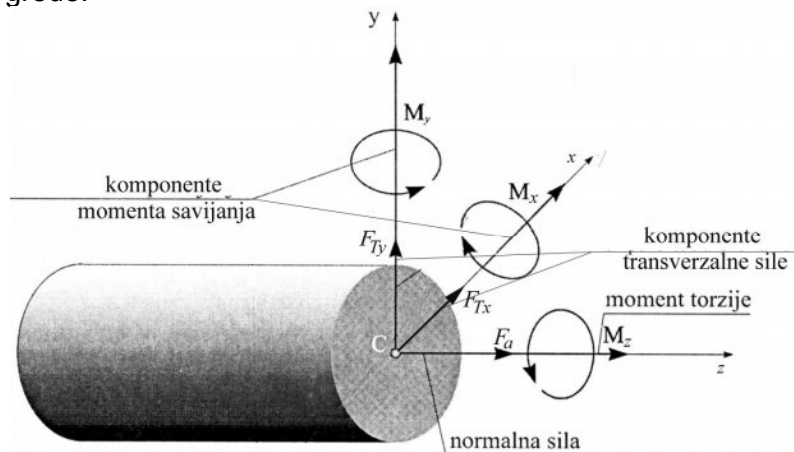
- dve translacije
- jednu rotaciju.

Ove mogućnosti kretanja poništavaju unutrašnje veličine u poprečnim preseccima grede: - translacije poništavaju uzdužne i poprečne sile a rotaciju poništava moment savijanja.

Kada na gredu, koja se nalazi u ravnoteži deluje opšti slučaj prostornog sistema sila u njenim poprečnim preseccima pojaviće se šest veličina: tri sile i tri momenta. Deo grede imao bi pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja šest stepeni slobode kretanja:

- tri translacije i
- tri rotacije

koje sprečavaju unutrašnje sile (poprečne-transferzalne u pravcu osa x i y i uzdužna u pravcu ose z) i momenti (savijanja  $M_x$  i  $M_y$  i uvijanja  $M_z$ ). Njihova veličina određuje se iz uslova ravnoteže posmatranog dela grede.



### Savijanje grede u dve ravni

Na slici je prikazana greda vezana sa cilindričnim ležajima u A i B i opterećena sa silom  $\vec{F}_1$

