VISOKA TEHNIČKA MAŠINSKA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA
TRSTENIK

mr Marina Karić, dipl. inž. maš.
dr Milica Todorović, prof.

TEHNIČKA MEHANIKA I (STATIKA)

TEORIJSKI IZVODI SA ZBIRKOM REŠENIH ZADATAKA

(radni materijal)

Trstenik, 2013.

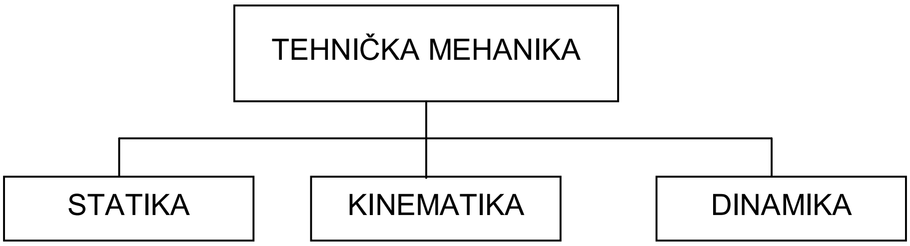
UVOD U TEHNIČKU MEHANIKU

Tehnička mehanika je nauka koja opisuje i definiše zakone kretanja ili mirovanja tela pod dejstvom sila. Iskazana definicija nije dovoljna za početak proučavanja tehničke mehanike. Za tu svrhu treba:

- definisati određen broj pojmova pomoću kojih se može opisati svaki problem,
- odrediti sadržaj proučavanja i probleme koje treba rešiti,
- navesti metode proučavanja i rešavanja problema,
- opisati organizaciju tehničke mehanike (osnovne zakone, osnovne veličine i njihove jedinice, podelu tehničke mehanike....)
- odrediti odnos tehničke mehanike i srodnih nauka.

Početak razvoja tehničke mehanike može se poistovetiti sa početkom razmatranja prirodnih pojava radi utvrđivanja zakonitosti njihovog odvijanja.

Podela tehničke mehanike čini se radi preglednijeg i lakšeg proučavanja i rešavanja problema. Klasična podela tehničke mehanike, uslovljena njenim razvitkom, karakteristikama i zadacima koje se proučavaju i rešavaju, prikazana je šematski na slici.



Definicije ovih grana tehničke mehanike su sledeće:

STATIKA je deo mehanike koji proučava uslove ravnoteže materijalnih tela pod dejstvom sila nezavisno od vremena.

KINEMATIKA je deo mehanike u kome se proučava geometrija kretanja tela. Pod kretanjem tela podrazumeva se promena njegovog položaja tokom vremena u odnosu na neko drugo telo. Drugačije se može reći da kinematika proučava kretanje ne vodeći računa o uzrocima kretanja (ne uzima u obzir mase tela niti sile koje na njih deluju)

DINAMIKA je deo mehanike u kome se proučavaju zakoni kretanja materijalnih tela na koje deluju sile zavisno od vremena, a u obzir se uzima i inercija masa koje se ubrzavaju.

Prva se pojavila STATIKA - koja proučava ravnotežu tela pod dejstvom sila - kao najjednostavniji deo mehanike. Statiku uvodi Arhimed i to kao praktičnu nauku. U skladu sa ljudskim potrebama razvijala se i mehanika i kraj Srednjeg veka donosi dinamiku koja već prelazi u teorijsku nauku tako da se razvoj tehničke mehanike može vezati za početak novog veka. U tom dobu mehanika doživljava takav procvat da su pokušavani da se njom objašnjavaju i društvene pojave.

Veličine u mehanici

Skalarne veličine – određene su intenzitetom (iznosom) odnosno samo brojnom vrednošću - jedan podatak, (dužina, masa, vreme, površina, zapremina, energija, temperatura)

Vektorske veličine – geometrijski određene intenzitetom, pravcem delovanja, smerom delovanja – tri podatka (sila, moment, vektor položaja, pomak, brzina, ubrzanje). Vektori se označavaju slovom i strelicom iznad (npr. $\vec{F},\vec{v},\vec{a}$......)

a) Osnovne veličine mehanike

Dužina – veličina kojom se kvantitativno određuje udaljenost dveju tačaka (metar, m)
Vreme – veličina kojom se kvantitativno meri tok događaja (sekunda, s)
Masa – veličina kojom se kvantitativno meri količina materije tela (kilogram, kg)

b) Izvedene veličine mehanike

Sila - mera delovanja jednog tela na drugo (Newton, N)

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $\quad [F] = [m] \cdot [a]$ $\quad N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$

Prikaz nekih izvedenih veličina mehanike

Naziv izvedene veličine	Matematički izraz	
Sila	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	N
Moment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$N \cdot m$
Brzina	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	m/s
Ubrzanje	$\vec{a} = d^2r/dt^2$	m/s^2
Količina kretanja	$\vec{K} = m \cdot \vec{v}$	$N \cdot s$
Rad	$A = \int \vec{F} \cdot dr$	$N \cdot m$
Snaga	$P = dA/dt$	$N \cdot m/s$
Kinetička energija	$E_k = m \cdot v^2/2$	$N \cdot m$
Potencijalna energija gravitacione sile	$E_p = G \cdot h$	$N \cdot m$

Međunarodni sistem mernih jedinica – SI sistem

Jedinice SI sistema

	Simbol	**Jedinica SI**
Osnovne veličine		
Dužina	L	metar $[m]$
Masa	M	kilogram $[kg]$
Vreme	T	sekund $[s]$
Izvedene veličine		
Brzina	v	m/s
Ubrzanje	a	m/s^2
Sila	F	Newton $N = kg \cdot m/s^2$
Rad	A	Joule $J = N \cdot m$
Energija	E	$J = N \cdot m$
Snaga	P	Wat $W = J/s$
Pritisk	p	Pascal $Pa = N/m^2$
Frekvencija	f	Hertz $Hz = 1/s$

Prefiksi jedinica SI sistema

Vrednost	**Naziv**	**Oznaka**
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hekto	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p

UVOD U STATIKU KRUTOG TELA

Kruta tela (idealno čvrsta) su modeli za realna tela koja ispunjavaju uslov nepromenljivosti forme tj. tela koja se pod dejstvom opterećenja ne deformišu - ne menjaju oblik i dimenzije. Statika krutog tela je deo tehničke mehanike koji proučava ravnotežu tela pod dejstvom sila:

a) određuje uslove koji moraju biti ispunjeni za postojanje ravnoteže
b) pronalazi i propisuje metode određivanja ravnoteže.

U pojavama koje proučava statika učestvuju teška tela tj. tela čiju težinu ne možemo zanemariti. Obično se težina tela zamenjuje sa jednom silom koja deluje u težištu tela. Ako je težina tela po veličini mnogo manja od sila koje deluju na telo ona se može zanemariti. Iako sva tela u prirodi imaju tri dimenzije za formu tela se ponekad uzima da ima jednu, dve ili tri dimenzije radi pojednostavljenja postupka rešavanja problema (kada ovo pojednostavljenje ne utiče na tačnost rezultata). Sva tela u statici se tretiraju kao apsolutno kruta: - kruti štap, - kruta figura, - kruto prostorno telo. Kaže se da je telo u ravnoteži ako ono miruje ili se kreće jednolikom brzinom i pravolinijski.

Definicija sile

Sila je svako delovanje koje nastoji da promeni stanje kretanja nekog tela. U matematičkom smislu to je vektor. Potpuni efekat dejstva sile određen je sledećim elementima:

- pravac delovanja sile - prava linija duž koje sila deluje
- veličina sile - određuje brojnu vrednost sile
- smer delovanja - određuje se na pravcu strelicom.

U statici napadna tačka sile nema značaja jer se sila može klizati po pravcu njenog delovanja. Ovo je dozvoljeno i ne utiče na rezultate rešavanja problema jer tela smatramo krutim.

Opisane osobine: veličina, pravac i smer delovanja imaju matematičke veličine koje se nazivaju vektori, pa se sila obeležava shodno obeležavanju vektora, velikim slovima latinice sa strelicom iznad slova ($\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{N}$ itd). Za računske operacije sa silama važe ista pravila koja važe u vektorskoj algebri.

Pojam sile definisan je osnovnim zakonom mehanike (II Newton-ov zakon):

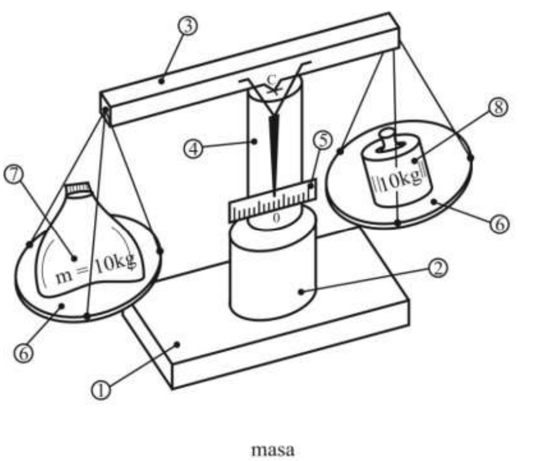
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (Sila = masa \cdot ubrzanje)$$

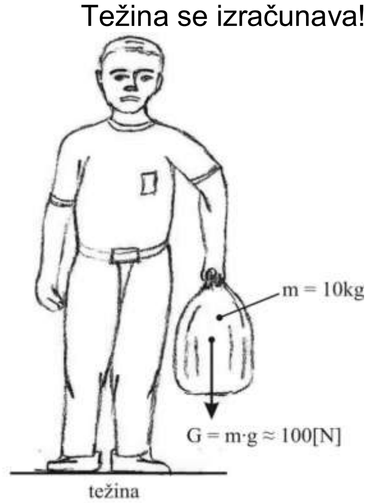
Ako II Newton-ov zakon primenimo na težinu:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} \qquad (Težina = masa \cdot ubrzanje\ zemljine\ teže)$$

$g = 9.81 m/s^2$ - ubrzanje zemljine teže u našim krajevima

Masa se meri! Težina se izračunava!





Ilustracija definicije za masu i težinu

Jedinica za silu - težinu je Njutn - oznaka N.

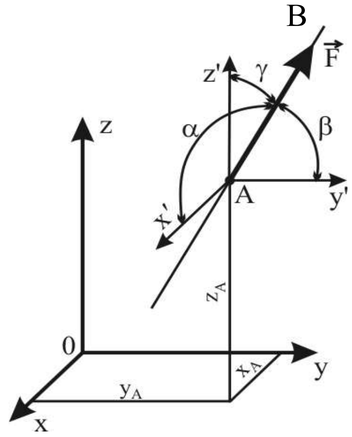
Njutn je izvedena jedinica SI sistema. Njutn je sila koja telo mase 1 kilogram ubrzava za 1 metar u sekundi na kvadrat.

$$[F]=[m]\cdot[a]\Rightarrow N=kg\cdot\frac{m}{s^2},$$

a veomae često se upotrebljava $1kN=1000N$

Analitičko prikazivanje sile

Za analitičko prikazivanje sile potreban nam je koordinatni sistem. U statici se služimo sa Dekartovim pravouglim sistemom desne orijentacije. Analitički se sila određuje sa 6 podataka od kojih je jedna uvek veličina sile (pozitivan broj). Pravac delovanja može se odrediti ako su nam poznate koordinate jedne njegove tačke i dva od uglova α, β i γ koje on zaklapa sa pravcima x', y', z', koji su paralelni sa koordinatnim osama. Treći ugao se određuje iz izraza:



$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Uglovi α, β i γ mogu se izračunati i iz koordinata dve tačke A i B koje se nalaze na napadnoj liniji sile prema relaciji:

Projekcija proizvoljne prostorne sile

$$\cos\alpha=\frac{x_B-x_A}{\overline{AB}},\qquad \cos\beta=\frac{y_B-y_A}{\overline{AB}},\qquad \cos\gamma=\frac{z_B-z_A}{\overline{AB}}$$

pri čemu je rastojanje:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Algebarske vrednosti projekcija sile iznose:

$$F_x=X=F\cos\alpha,\qquad F_y=Y=F\cos\beta,\qquad F_z=Z=F\cos\gamma$$

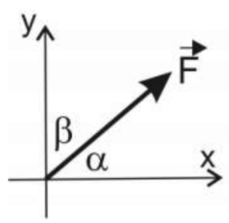
Obrnuti zadatak od projektovanja sile jeste određivanje intenziteta i pravca sile u prostoru ako su poznate projekcije F_x, F_y i F_z:

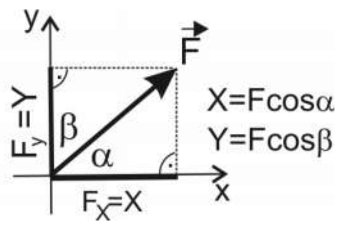
$F=\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}+F_z^{\,2}}$, a kosinusi pravaca se određuju:

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{F},\quad \cos\beta=\frac{F_y}{F},\quad \cos\gamma=\frac{F_z}{F}$$

Za slučaj da se sila nalazi u ravni ove relacije su jednostavnije i imaju oblik:

$F=\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{F_x}{F}$ i $\cos\beta=\dfrac{F_y}{F}$,





Geometrijsko prikazivanje sile

Kod geometrijskog prikazivanja sile ne vodi se računa o koordinatnom sistemu već samo o međusobnom položaju pravca delovanja sila (ako ih ima više) i naravno o njihovom smeru. Sila se prikazuje kao usmerena duž. Ako je dužina ove duži u određenom odnosu sa veličinom sile kažemo da je sila prikazana u razmeri što se zapisuje:

$$U_F=\frac{aN}{1cm}\qquad (1cm=aN)$$

što znači: 1 cm dužine predstavlja a Njutna. Veličine sila crtaju se u razmeri kada problem rešavamo grafički.

Aktivne i pasivne sile

Sve sile se mogu svrstati u dve grupe s obzirom na njihov uticaj na poticanje ili poništavanje kretanja.

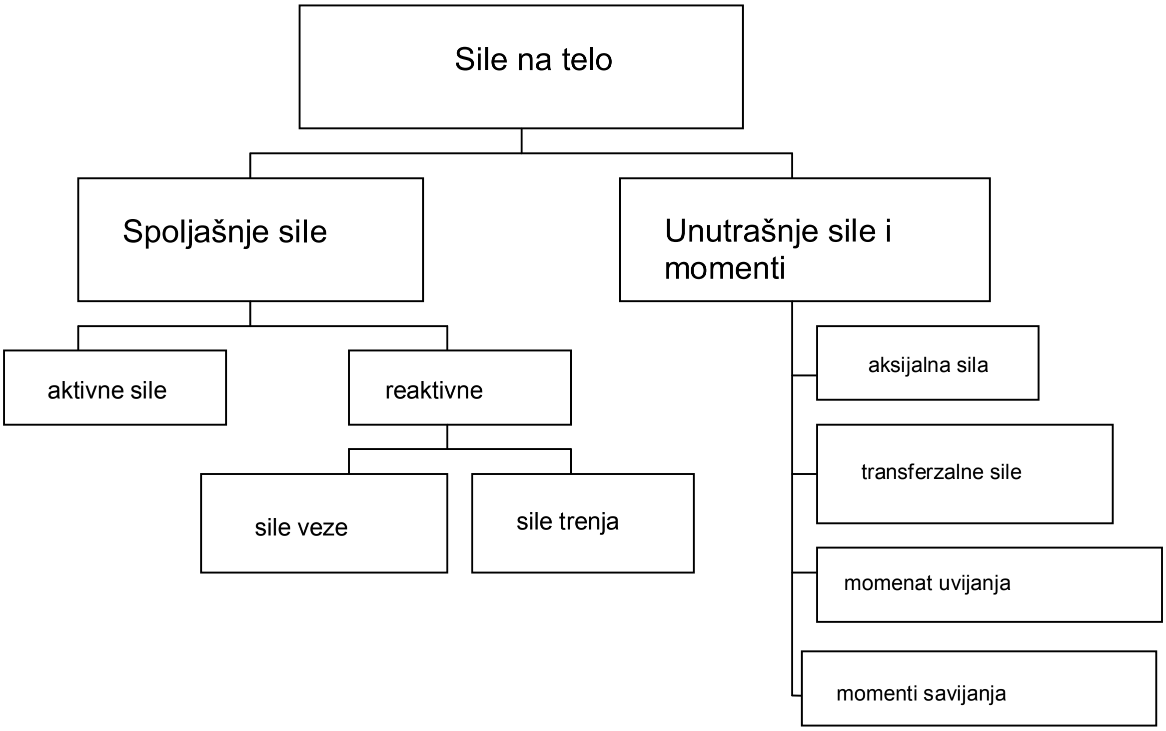
Aktivnim silama nazivamo sile koje nastoje izazvati kretanje.

Pasivne su one sile koje ograničavaju kretanje i nazivamo ih reakcijama veza.

Spoljašnje i unutrašnje sile

Prema mestu delovanja možemo sile podeliti na 2 grupe:

- sile koje deluju na površini tela i nazivamo ih spoljašnje sile
- sile koje deluju po preseku ili zapremini tela i nazivamo ih unutrašnjim silama.



Spoljašnje sile u realnosti uvek deluju na nekoj površini (većoj ili manjoj) ali se u statici razlikuju 3 karakteristična slučaja:

- koncentrisane sile su idealizacija tj. rezultanta delovanja po površini,
- linijsko kontinualno opterećenje
- površinsko kontinualno opterećenje.

Npr. Ako čovek stoji na konstrukciji - delovanje čoveka na konstrukciju zamenićemo koncentrisanom silom koja je po veličini jednaka njegovoj težini a delovanje na konstrukciju između njegovih stopala. Ako čovek leži na konstrukciji govorimo o kontinualnom opterećenju konstrukcije. Jedinica linijskog kontinualnog opterećenja je (N/m). Površinsko opterećenje je u stvari pritisak (N/m^2).

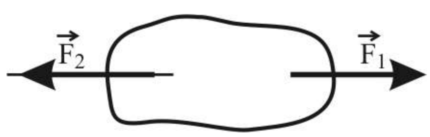
O unutrašnjim silama biće reči u grafostatici za sada je dovoljno reći da su unutrašnje sile po preseku rezultat unutrašnjeg naprezanja a sila po zapremini je privlačna sila između tela.

AKSIOME STATIKE

Osnovu statike čini sedam osnovnih zakona od kojih su prva četiri aksiomi tehničke mehanike a preostala tri su principi statike. Pomoću ovih zakona moguće je za probleme iz realnog sveta definisati odgovarajući idealizirani model i matematički izraziti uslove ravnoteže.

Aksioma 1. Pod dejstvom samo dve sile ($\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$) kruto telo nalazi se u ravnoteži samo ako one imaju isti pravac delovanja, isti intenzitet ($F_1 = F_2$) i suprotan smer($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$). Ovakve dve sile čine najprostiji sistem uravnoteženih sila - nula sila. (Pod dejstvom jedne sile telo ne može biti u ravnoteži već se pomera u pravcu i smeru delovanja sile).

Aksioma 2. Mehaničko stanje tela neće se promeniti ako se sistemu sila koje na njega deluju doda ili oduzme uravnoteženi sistem sila. Iz ove aksiome proizilazi važna posledica: sila koja deluje na kruto telo je klizeći vektor - može se prenositi iz jedne napadne tačke u drugu duž svog napadnog pravca a da se tom prilikom dejstvo sile na telo ne menja.



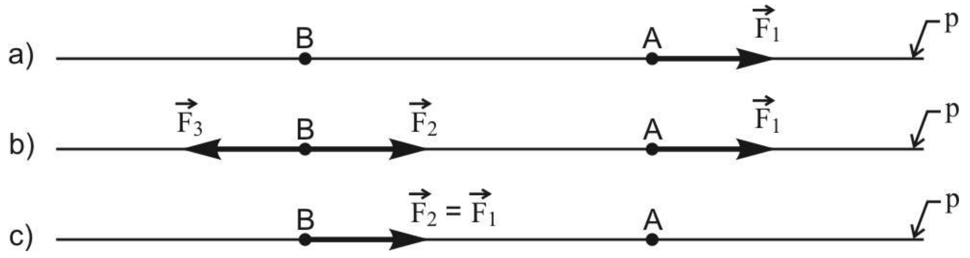
Mogućnost klizanja sile dokazuje se na sledeći način:

- neka u tački A pravca p deluje sila $\vec{F}_1$;

- dodajmo u tački B sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ koje su jednake po veličini. Prema aksiomi o poništavanju sila situacije a) i b) su međusobno ekvivalentne jer se sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ međusobno poništavaju;

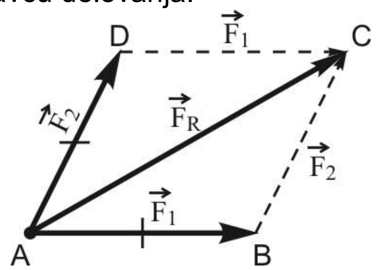
- neka su veličine sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ jednake.

Tada se $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ mogu poništiti. Na pravcu p ostaje sila $\vec{F}_2$ čija je napadna tačka tačka B. Kako sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ imaju istu veličinu, isti pravac i smer delovanja možemo rezultat ovog postupka objasniti kao klizanje sile $\vec{F}_1$ po pravcu p



Na osnovu iznetog za silu se kaže da je ona klizni vektor u mehanici krutih tela, jer njen doprinos uslovima ravnoteže ne zavisi od položaja na pravcu delovanja.

Aksioma 3. Delovanje dveju sila na jedno telo može se zameniti delovanjem jedne sile koja je jednaka dijagonali paralelograma čije su stranice spomenute sile. Sile koje sabiramo nazivamo komponente a njihov zbir je rezultanta. Sabiranje sila često se naziva i slaganje. Rezultanta je zamišljena sila čije je delovanje ekvivalentno delovanju zadatih sila. Matematički se, u vektorskom obliku, ovaj zakon izražava:



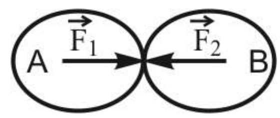
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_R$$

Grafički prikaz dat je na slici (veličine sila proporcionalne su dužini vektora).

Iz ovog zakona proizilazi važan zaključak: rezultat delovanja sila na telo ne zavisi od redosleda delovanja sila. Ovo je očigledno sa slike jer je F_R stranica trougla ABC i trougla ADC.

Aksioma 4. Dva tela deluju uvek uzajamno jedno na drugo silama koje su po veličini i pravcu jednake ali suprotnog smera.

Odavde proizilaze dva zaključka:
- da bi nastala sila moraju dva tela delovati jedno na drugo.
- Telo izolovano od drugih tela ili sila ne postoji.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Princip solidifikacije:

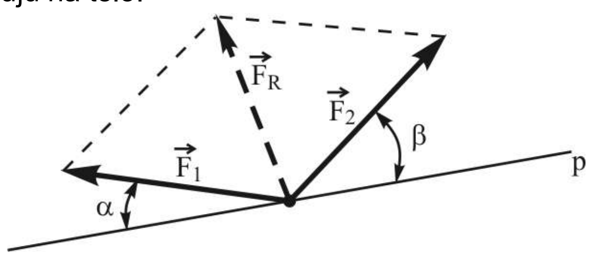
Ako se deformabilno telo, na koje deluju sile, nalazi u ravnotežnom stanju onda se to stanje neće promeniti kada to telo postane kruto. Npr. ako je lanac opterećen silama zatezanja u ravnoteži, biće u ravnoteži i ako karike lanca zavarimo tj. lanac učinimo krutim. Obrnuti stav ne važi.

Princip oslobađanja od veza:

Veze koje ograničavaju slobodu kretanja krutog tela mogu se zameniti silama takvim da kruto telo ostane u stanju mirovanja. Ove sile nazivamo reakcije veza. Odrediti ravnotežu znači odrediti reakcije veza, odnosno sile sa kojima veze deluju na telo.

Princip poništavanja dveju sila:

Dve sile se međusobno poništavaju, ako imaju isti pravac delovanja, jednaku veličinu i suprotni smer.



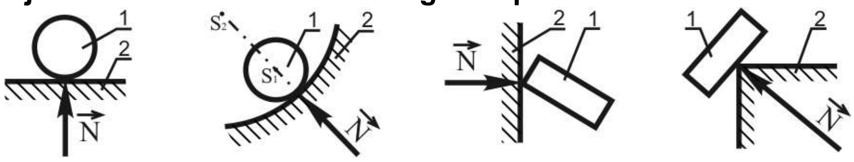
Ovaj princip proizilazi iz zakona o paralelogramu sila. Ako se uglovi α i β , koje zaklapaju pravci sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ sa pravcem p smanjuju veličina sile $\vec{F}_R$ se takođe smanjuje da bi postala jednaka nuli za $\alpha = 0$ i $\beta = 0$.

VEZE I REAKCIJE VEZA

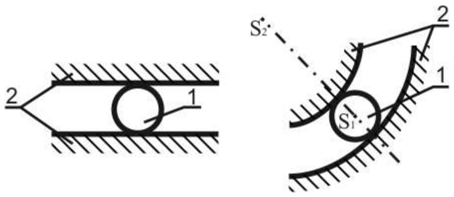
Tačka ili telo pod dejstvom opterećenja pomera se u ravni ili prostoru. Vezivanjem s podlogom dovodimo ih u stanje ravnoteze (stanje mirovanja). Veze su elementi povezivanja sistema čiju ravnotežu posmatramo sa okolinom. To su mehanički ili fizički uređaji koji sprečavaju kretanje tela. Telo čije je kretanje ograničeno zove se vezano telo, a telo koje ograničava kretanje zove se vezom. Telo deluje na vezu a po aksiomi 4 dejstvo veze je istog intenziteta i pravca a suprotnog smera. Proučićemo idealne glatke veze mašinskih delova - bez uzimanja u obzir sile trenja koja postoji kod realnih veza.

Vrste veza: **- dodirna veza**

a) jednostrana dodirna veza ili glatka površi



b) dvostrana dodirna veza



model simbol dvostrane dodirne veze

Delovi tela koja se dodiruju mogu imati proizvoljan oblik. Dodirni delovi mogu biti kugle valjci, ravni. Sve jedno je koje telo smatramo da je aktivno ili pasivno bitno je da se kod ove veze pojavljuje normalna reakcija na dodirnu površinu (na poziciji 2. i prolazi kroz tačku S, odnosno prolazi kroz tačke S_1 i S_2. Modeli pod a) daju reakciju samo u jednom smeru - jednostrane dodirne veze a modeli pod b) su dvosmerne dodirne veze. Smer reakcije na jedno telo uvek je suprotan smeru u kome veza ne dozvoljava pomeranje.

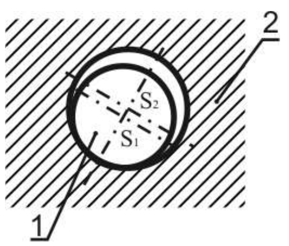
U pogledu određenosti reakcije koju daje dodirna veza nepoznata je samo njena veličina (intenzitet), pravac je određen geometrijom a smer se određuje prema predznaku veličine reakcije, ako je predznak + smer se poklapa sa predpostavljenim.

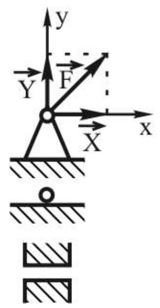
Kaže se da dodirna veza unosi **jednu nepoznatu** u rešavanje statičkog problema.

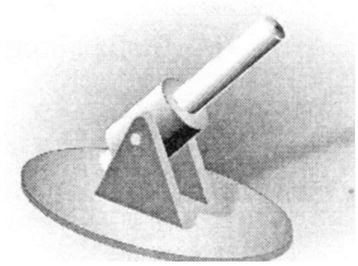
Cilindrični zglob

Model ove veze prikazan je na slici. Deo 1 je valjak, ravan dela 2 je cilindrična površina. Ova veza daje reakciju bilo kojeg pravca u ravni upravnoj na osu valjka i u oba smera. Pravac delovanja reakcije uvek prolazi kroz tačke (središta) S_1 i S_2.

Model cilindričnog zgloba Simbol





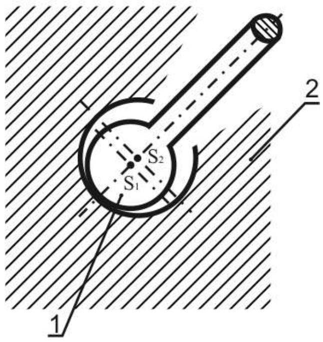


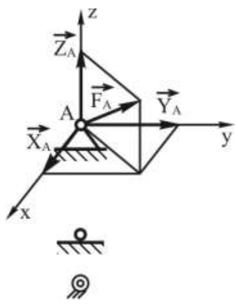
Za cilindrični zglob može se reći da je zatvorena dodirna veza jer se reakcija stvara u dodiru a jedna dodirna površina zatvara drugu. Po ovoj analogiji se dodirna veza nekad naziva pomični cilindrični zglob. Reakcija cilindričnog zgloba ima nepoznatu veličinu i pravac (svaka sila proizvoljnog pravca u ravni rastavlja se na 2 komponente). Kaže se da cilindrični zglob unosi **dve nepoznate** u rešavanje statičkog problema.

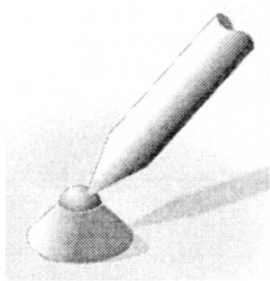
Sferni zglob

Ova se veza sastoji od kuglastog dela sa izdankom na koji je vezano telo proizvoljnog oblika. Telo 2 ima u sebi kuglastu šupljinu. Sferni zglob daje reakciju čiji pravac delovanja može imati bilo koji položaj u prostoru. Reakcija može imati bilo koji od dva moguća smera. Pravac delovanja uvek prolazi kroz tačke S_1 i S_2. Za sferni zglob se može reći da je dodirna veza zatvorena u prostoru.

Sferni zglob daje reakciju nepoznatu po veličini i pravcu u prostoru. Kaže se da sferni zglob unosi u rešavanje statičkog problema **tri nepoznate**.







Model sfernog zgloba | Simboličko prikazivanje

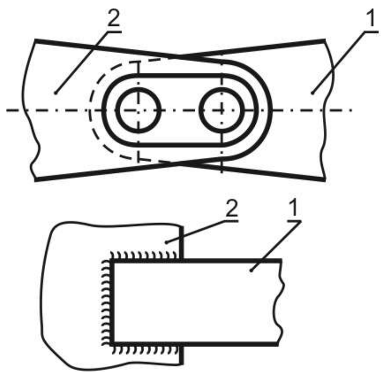
Uklještenje

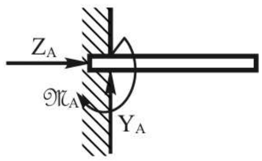
Model uklještenja u ravni prikazan je na slici:

Telo 1 ima na sebi dva valjkasta izdanka koji se nalaze u šupljini tela 2. Ovaj model kao da je sastavljen od 2 cilindrična zgloba.

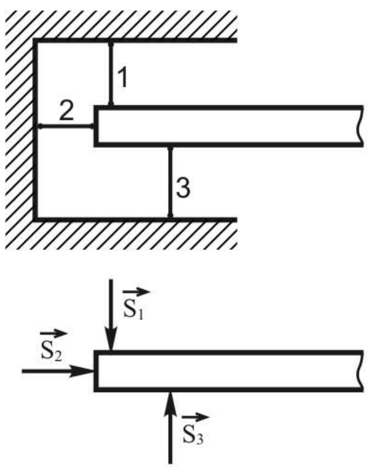
Telo 1 i 2 međusobno su neraskidivo spojena (zalepljena, zavarena...).

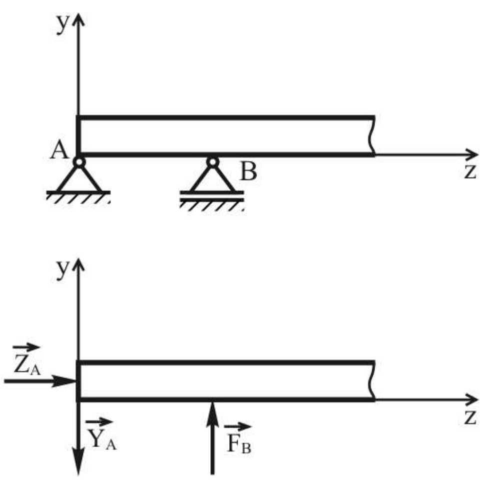
Model veze | Simboličko prikazivanje





Uklještenje daje kao reakciju silu proizvoljnog pravca u ravni i spreg koji se naziva moment uklještenja. Kako je za određivanje sile proizvoljnog pravca potrebno znati njenu veličinu i ugao koji pravac delovanja zaklapa sa nekom referentnom osom to uz nepoznatu veličinu momenata uklještenja, uklještenje unosi u rešavanje statičkog problema **tri nepoznate**. Uklještenje se može interpretirati i kao veza sa tri štapa zglobno spojena sa telima 1 i 2 ili kao veza sastavljena od jednog cilindričnog zgloba i jedne dvostrane dodirne veze.



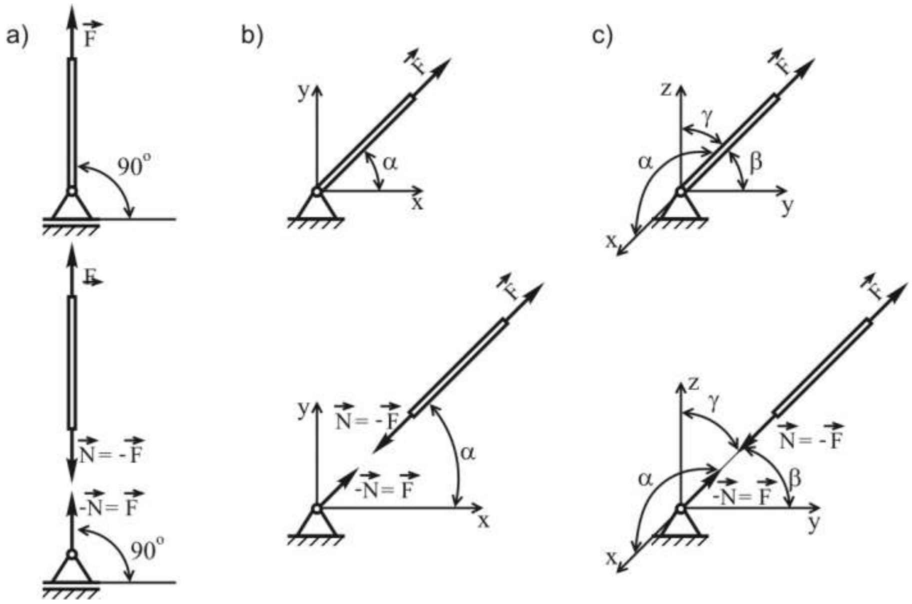


Uže - nit

Užad se mogu vezivati sa:

- dodirnom vezom
- cilindričnim zglobom
- sfernim zglobom.

U slučaju kada je vezano dodirnom vezom uže se mora postaviti u pravac određen dodirnom vezom (sl. a). U preostala 2 slučaja uže se postavlja u bilo koji pravac u ravni (sl. b) ili bilo koji pravac u prostoru (sl. c), pravac užeta određen je geometrijom, pa nam je nepoznata samo veličina reakcije iako cilindrični i sferni zglob unose u rešavanje problema dve odnosno tri nepoznate veličine.

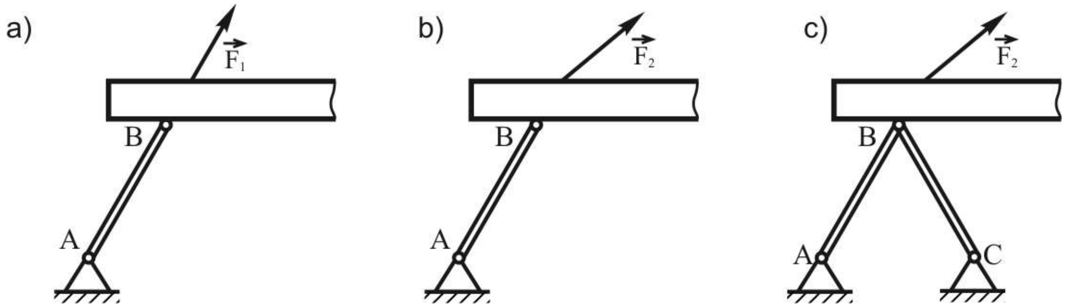


Uže mora biti opterećeno silama, koje ga nastoje izdužiti (trpi samo istezanje). Veoma je značajno da uže kao vezni element dvaju tela sa kojima je vezano cilindričnim ili sfernim zglobom unosi u rešavanje problema samo **jednu nepoznatu** - veličinu reakcije (jer je iz zadate geometrije poznat pravac spojnog elementa).

Štap

Za vezivanje štapa i vezivanje štapom važi sve što je rečeno za uže. Aktivna sila na štap i reakcija veze mogu imati oba moguća smera.

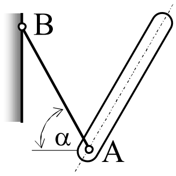
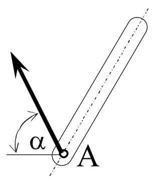
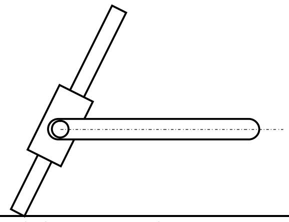
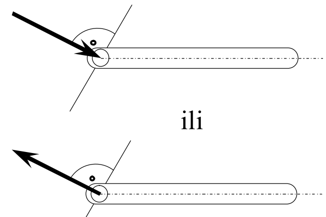
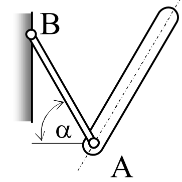
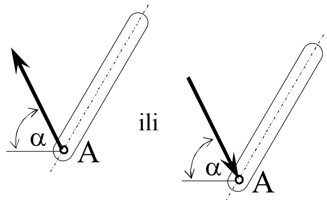
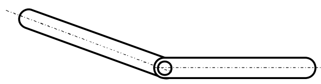
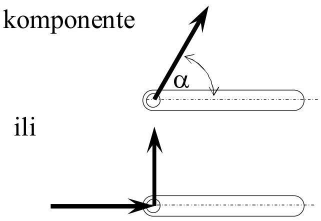
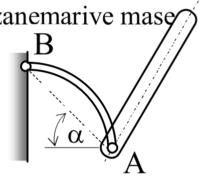
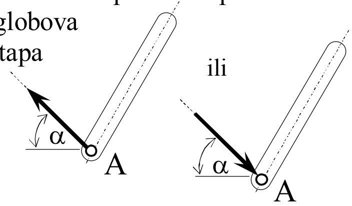
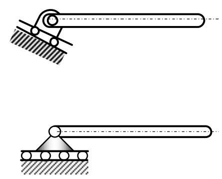
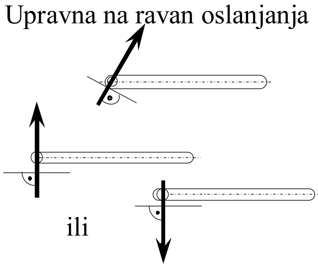
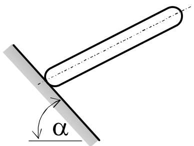
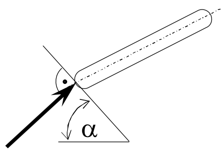
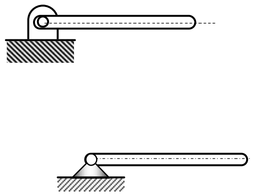
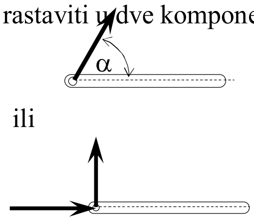
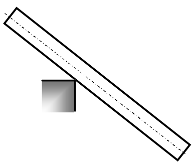
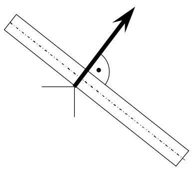
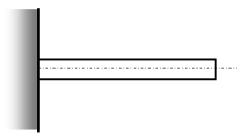
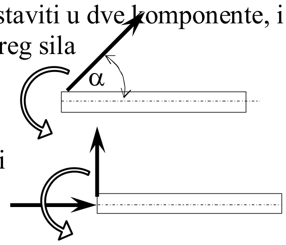
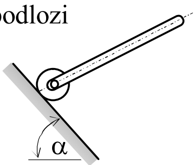
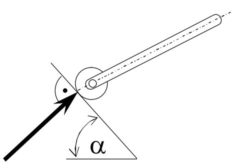
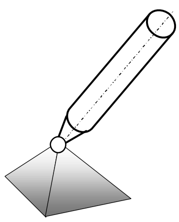
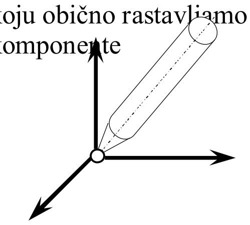
Vezivanje grede pomoću spojnog elementa (štapa, niti) sa cilindričnim zglobom nema isti uticaj na ravnotežu grede kao kada je greda sa njime direktno spojena. Da bi postigli isti efekat gredu treba vezati sa dva štapa.



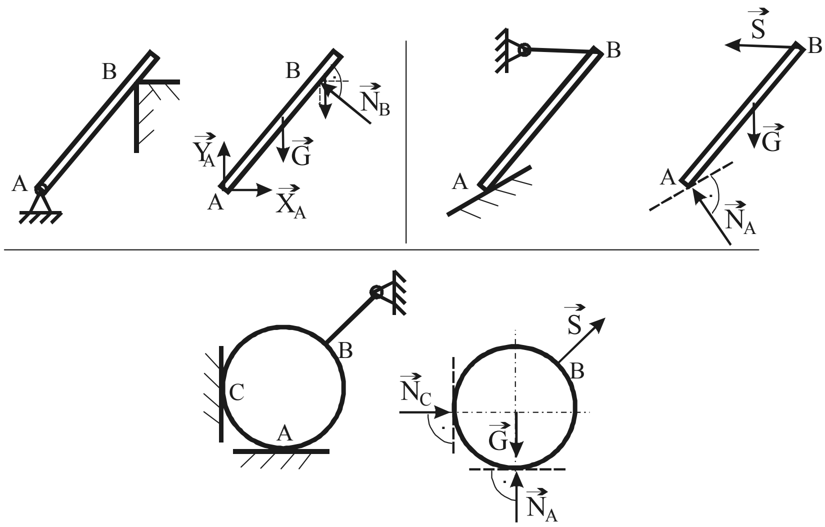
U slučaju a) tačka B će biti u ravnoteži što nije ispunjeno u slučaju prikazanom na slici b). Uvođenjem štapa BC tačka B će se uravnotežiti. Veza sa 2 štapa je ekvivalent cilindričnom zglobu veza sa 3 štapa čije se ose seku u jednoj tačku ekvivalent je sfernom zglobu.

Reakcije veza imaju uvek suprotan smer delovanja od mogućeg kretanja tela kada tih veza ne bi bilo.

REAKCIJE IDEALNIH VEZA

Vrsta veze	*Reakcija veze*	*Vrsta veze*	*Reakcija veze*
Uže (žica, lanac, kabl) 	Zatežuća u pravcu užeta 	Klizač na vodilici ili u cilindru 	Upravna na ravan klizanja 
Ravni štap zanemarive mase 	Zatežuća ili pritisna u pravcu štapa 	Zglobna u ravni 	Kosa reakcija, koju možemo rastaviti u dve komponente 
Zakrivljeni štap zanemarive mase 	Zatežuća ili pritisna u pravcu zglobova štapa 	Pomični oslonac 	Upravna na ravan oslanjanja 
Glatka podloga 	Upravna na podlogu 	Nepomični oslonac 	Kosa reakcija, koju možemo rastaviti u dve komponente. 
Glatki izdanak 	Upravna na štap (gredu) 	Uklještenje 	Kosa reakcija, koju možemo rastaviti u dve komponente, i spreg sila 
Valjak na glatkoj podlozi 	Upravna na podlogu 	Sferni zglob 	Kosa reakcija u prostoru, koju obično rastavljamo u tri komponente 

PRIMERI OSLOBAĐANJA TELA OD VEZA



Postupak rešavanja statičkih problema

Za konkretni statički problem iz prakse postupak rešavanja je sledeći:

1. Utvrditi da li je problem statički (telo koje se posmatra treba da miruje ili da se kreće jednoliko po pravcu).

2. Tela koja učestvuju u posmatranoj pojavi su realna tela pa ih po principu solidifikacije prevodimo u kruta tela (geometrijska tela) a njihovu materijalnost izrazićemo uvodeći u razmatranje njihovu težinu kao silu koja deluje iz njihovog težišta.

3. Primenom principa jednakosti akcije i reakcije i principa oslobađanja krutog tela od veza za svako telo formira se po jedan sistem sila.

4. Primeniti matematičke metode i rešiti problem.

Zadaci statike krutog tela

U statici krutog tela rešavaju se dva osnovna zadatka:

- Sistem sila (aktivni), koje deluju na kruto telo, treba svesti na jednostavniji oblik tj. zameniti ga ekvivalentnim sistemom sila. Svođenje sistema sila na jednostavniji oblik naziva se redukcija sila.
- Odrediti uslove pod kojima će kruto telo, na koje deluje sistem sila (aktivni i pasivni), biti u ravnoteži.

SISTEMI SILA

Radi sistematičnog proučavanja uvodi se klasifikacija sistema sila. Osnov za ovu klasifikaciju je međusobni položaj pravaca delovanja sila. Pojedine sile u jednoj vrsti sistema mogu imati bilo koji smer i veličinu ako je ona različita od nule.

- kolinearni sistem sila - najjednostavniji sistem sila se naziva kolinearni a odnosi se na sistem sila koje sve leže na istom pravcu,
- komplanarni sistem sila - pravci delovanja svih sila leže u jednoj ravni. Kod ovakvih sistema razlikujemo tri slučaja:
  - sistem paralelnih sila u ravni - pravci delovanja ovih sila međusobno su paralelni,
  - sučeljni sistem sila - pravci delovanja svih sila seku se u jednoj tački,
  - proizvoljni sistem sila.

Prostorni sistem sila

Razlikujemo četiri slučaja:

- sistem paralelnih sila u prostoru - pravci delovanja svih sila međjusobno su paralelni
- prostorni sistem sučeljnih sila - pravci delovanja svih sila seku se u jednoj tački
- sistem mimoilaznih sila
- opšti slučaj prostornog sistema sila.

Kolinearni sistem

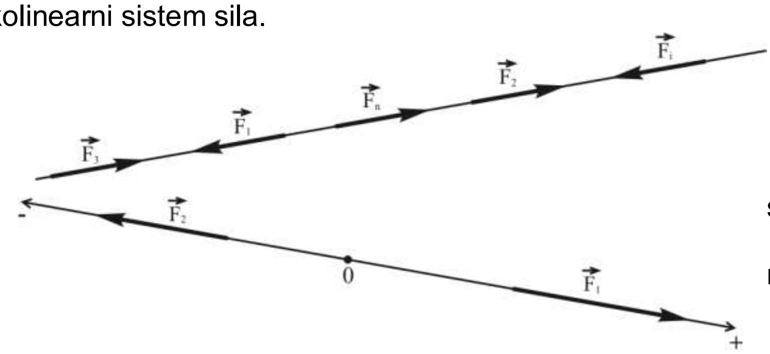
Proizvoljni sistem sila u ravni → Sistem sučeljnih sila
Proizvoljni sistem sila u ravni → Sistem paralelnih sila

Opšti slučaj prostornog sistema sila → Sučeljni prostorni sistem
Opšti slučaj prostornog sistema sila → Sistem paralelnih sila
Opšti slučaj prostornog sistema sila → Sistem mimoilaznih sila

Šematski prikaz navedene podele

KOLINEARNI SISTEM SILA

Za skup proizvoljnog ali konačnog broja (n) sila koje sve leže na jednom pravcu kažemo da je kolinearni sistem sila.



Kako silu možemo klizati po pravcu njenog delovanja nije nam važan položaj sile na pravcu već samo smer i veličina.

Za analitičko svođenje treba na pravcu delovanja označiti smer.

Sila F_1 ima pozitivan smer jer je usmerena od tačke O prema pozitivnom delu pravca. Sila F_2 ima negativni smer - analogno. Sile se zadaju:

- veličina brojem Njutna
- smer predznakom ovog broja

Npr. F_1 = 300N F_2 = -100N

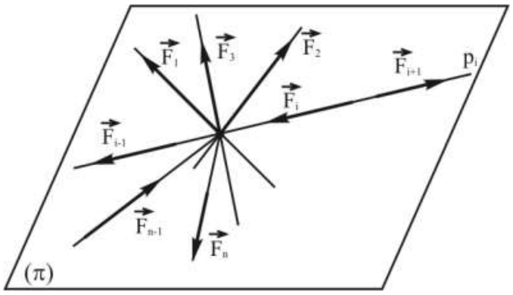
Postupak redukcije svodi se na sabiranje veličina (sabiranje realnih brojeva). Broj koji se dobije određuje veličinu rezultante (sile) u N a predznak definiše smer. Ako je zadat sistem sila $\vec{F}_i$ (i = 1,2,3... n) onda se njegova rezultanta određuje izrazom:

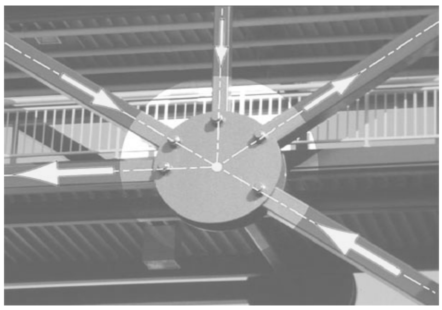
$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

Zaključci:

1) Kolinearni sistem sila uvek se može svesti na jednu silu.
2) Ako se sistem sastoji od sila istog smera njegova rezultanta je različita od nule.
3) Sistem sila različitog smera može imati rezultantu jednaku nuli ili različitu od nule.

SUČELJNI SISTEM SILA U RAVNI



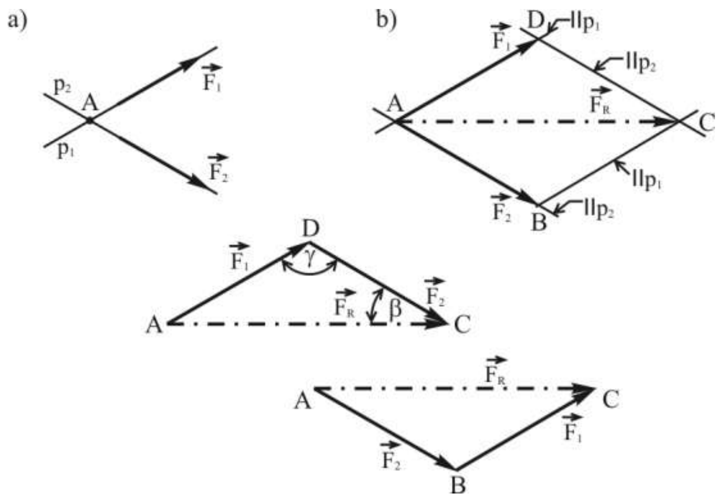


Skup od proizvoljnog ali konačnog broja sila (n) koje sve leže u istoj ravni a pravci delovanja im se seku u jednoj tački nazivamo sučeljnim ravnim sistemom sila.

Položaji sila na pravcu delovanja nisu značajni - važni su uglovi između pravaca delovanja, veličine sila i njihovi smerovi. Svaka od sila može biti rezultanta nekog kolinearnog sistema sila. Sile na pravcu p_i mogu se zameniti jednom silom.

<u>Grafičko svođenje dve sučeljne sile</u>

Sistem od dve sile se svodi na jednu primenom zakona o paralelogramu sila. Postupak se može pojednostaviti tako da se umesto paralelograma konstruiše trougao sila.



$F_R = A\overline{C} \cdot U_F$ - veličina rezultante. Rezultat delovanja sila isti je bilo da prvo deluje sila $\vec{F}_1$ ili sila $\vec{F}_2$.

Plan položaja (slika a) - dužine vektora nisu važne simbolično prikazuju veličine ali u potpunosti određuju pravce i smerove.

ΔACD i ΔABC spojeni po strani AC daju paralelogram ABCD ⇒ ispravnost postupka.

Rezultantu dveju sila možemo odrediti i bez opisanog grafičkog postupka rešavajući trougao sila - kako se to radi sa trouglom u geometriji. U slučaju kada su poznate veličine sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i γ - ugao između njih primenićemo kosinusnu teoremu:

$$F_R^{\,2} = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma$$

Ako su poznati uglovi γ, β i F_1 primenjuje se sinusna teorema:

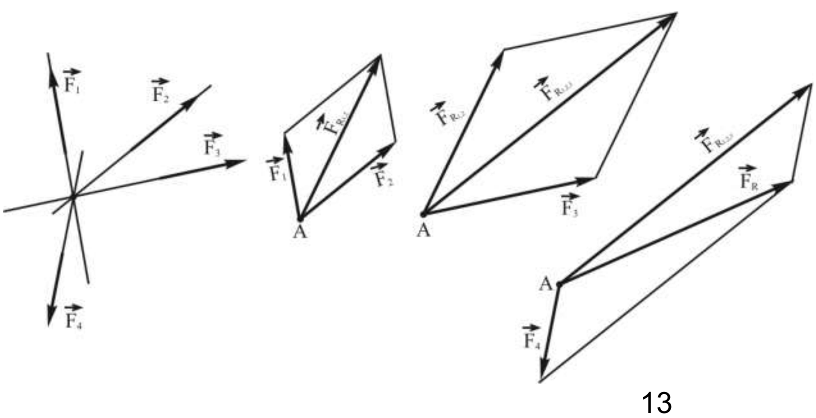
$$\frac{F_R}{\sin\gamma} = \frac{F_1}{\sin\beta}$$

kada sile F_1 i F_2 zaklapaju ugao od 90° veličina rezultante određuje se Pitagorinom teoremom .

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2$$

Određivanje rezultante dveju sila svodi se na proračun jedne stranice trougla.

<u>Sistem od tri i više sila</u>



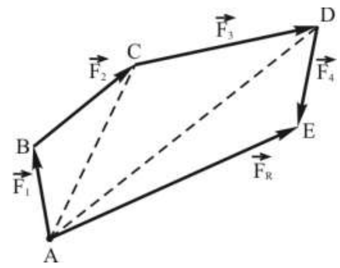
Ovi sistemi reduciraju se grafički višestrukom primenom zakona o paralelogramu sila.

$F_1 = 200N \qquad F_2 = 300N$

$F_3 = 400N \qquad F_4 = 250N$

$$U_F = \frac{100N}{1cm}$$

Ako je sistem sadržao n sila njegova rezultanta je sila određena u (n-1) koraku. U praksi se postupak reduciranja izvodi tako što se konstruiše poligon sila. Iz presečne tačke napadnih pravaca sila u izabranoj razmeri nanosi se prva sila tako da joj pravac delovanja bude paralelan sa pravcem delovanja u planu položaja a smer isti. Iz vrha prve nanosi se druga sila, iz vrha druge treća itd. Tačke početka prve sile i kraja zadnje sile određuju pravac delovanja rezultante. Rastojanje između ovih tačaka određuje veličinu rezultante u određenoj razmeri a smer joj je od početka prve prema kraju zadnje sile.



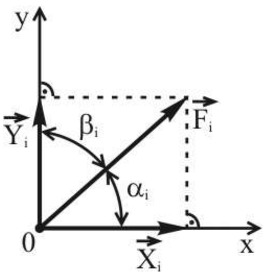
$F_R \neq 0$ - poligon otvoren

$F_R = 0$ - poligon zatvoren

Ako krenemo iz A u smeru strelica na silama i vratimo se u tačku A prošavši kroz B, C i E - (zatvorimo putanju) - zatvoreni poligon, kod otvorenog poligona imamo 2 puta.

Analitičko svođenje

Sučeljni sistem sila posmatraćemo u xOy ravni Dekartovog koordinatnog sistema čiji je koordinatni početak postavljen u tačku u kojoj se seku pravci delovanja sila. Redukcija sučeljnog sistema sila vrši se tako što se svaka sila sistema razloži na komponente u pravcu koordinatnih osa čime se zadati sistem prevodi u dva kolinearna sistema, odrede se rezultante kolinearnih sistema, čijim se sabiranjem odredi rezultanta zadatog sistema.



$X_i = F_i \cdot \cos\alpha_i = \vec{i} \cdot \vec{F}_i$ - skalarni proizvod $\qquad F_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$

$Y_i = F_i \cos\beta_i = F_i \sin\alpha_i = \vec{j} \cdot \vec{F}_i \qquad (\alpha_i + \beta_i = 90^0)$

X_i, Y_i - projekcije sile $\vec{F}_i$ na ose x i y (su skalari) ; $\vec{i}, \vec{j}$ – jedinični vektori osa x i y:

Sila zapisana u vektorskoj formi:

$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} = \vec{X}_i + \vec{Y}_i$ - vektorsko (geometrijsko) sabiranje

Komponente sile bile bi:

$\vec{X}_i = \vec{i} \cdot X_i$

$\vec{Y}_i = \vec{j} \cdot Y_i$ - vektori

Veličina komponente je projekcija u pravouglom koordinatnom sistemu.

Određivanje rezultante sistema

Neka je zadat sistem sučeljnih sila u ravni $\vec{F}_i (i = 1,2,3....n)$, tada se njegova rezultanta određuje na sledeći način:

1) sistem se rastavi na dva kolinearna sistema sila po osi x i y tako da se svaka sila zameni svojim komponentama

2) izvrši se redukcija ovih kolinearnih sistema, odnosno odrede se njihove rezultante

- za sistem po osi x : $\qquad X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- za sistem po osi y: $\qquad Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

3) sabiranjem ovih dveju sila po Pitagorinoj teoremi odredi se veličina rezultante zadatog sistema:

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}$$

4) Pravac i smer rezultante odrede se pomoću kosinusa pravaca:

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R}{F_R} \qquad \cos\beta_R = \frac{Y_R}{F_R}$$

Zaključci:

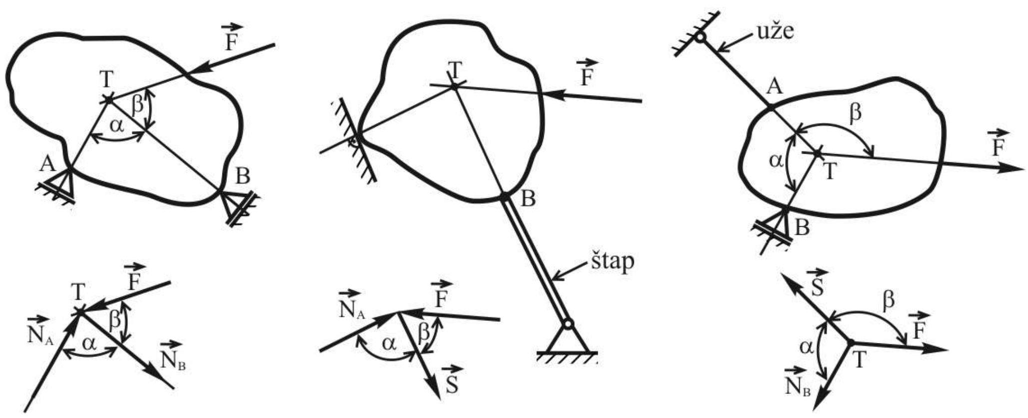
1. Sučeljni sistem uvek se može svesti na jednu silu

2. Ako se sistem sastoji od 2 sile a one nisu kolinearne rezultanta je uvek različita od nule
3. Sistemi od tri i više sila mogu imati rezultantu različitu ili jednaku nuli
4. Kod grafičkog reduciranja $\vec{F}_R$ je jednako 0 ako je poligon sila zatvoren
5. Ako je kod analitičkog reduciranja $X_R = 0$ i $Y_R = 0$ tada je rezultanta sistema jednaka nuli ($F_R = 0$). (Ako je $X_R = 0$ a $Y_R \neq 0$ tada je $F_R = Y_R$, a ako je $X_R \neq 0$ a $Y_R = 0$ tada je $F_R = X_R$).

<u>Ravnoteža čestice</u>

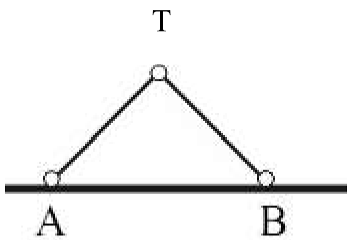
Ako je realno telo opterećeno sa sučeljnim sistemom sila smatramo ga česticom i određujemo ravnotežu čestice. Položaj ove čestice stalan je u odnosu na realno telo i određen je tačkom u kojoj se seku pravci delovanja aktivnih sila i reakcija veza. U protivnom realno telo ne bi mogli smatrati česticom i ono ne bi bilo u ravnoteži bez dodatnog vezivanja.

<u>Ravnoteža čestice u ravni</u>

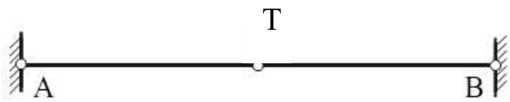


Aktivni sistem sila predstavljen je silom $\vec{F}$. Ona mora biti različita od nule inače nema smisla takav sistem sila nazvati aktivnim. Pod dejstvom ove sile telo bi se kretalo u pravcu i smeru delovanja sile. Da bi obezbedili ravnotežu telo moramo vezati. Na slici je prikazano nekoliko slučajeva vezivanja realnih tela koja su oslobođena veza i zamenjena česticom.

Treba paziti na raspored veza. Čestica se može vezati sa dva štapa, štapovi ne smeju biti na istom pravcu, jer ćemo dobiti mehanizam (geometrijski promenljiv sistem):



ispravno

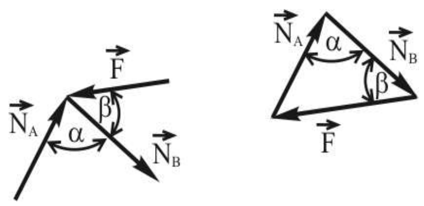


neispravno

Ravnoteža čestice u ravni određuje se na 2 načina:
- geometrijski i
- analitički.

<u>Geometrijski</u> se ravnoteža čestice u ravni određuje na osnovu teoreme o ravnoteži triju sila, koja glasi:

Da bi telo pod dejstvom tri sile čiji pravci delovanja leže u istoj ravni, bilo u ravnoteži potrebno je da im se pravci delovanja seku u jednoj tački a dovoljno da im vektori formiraju zatvoreni trougao sila.



Problem se može rešiti na 2 načina:

- trougao sila se skicira, a nepoznati elementi trougla se izračunavaju primenom sinusne ili kosinusne teoreme,

- konstruiše se trougao sila crtajući vektore sila u nekoj odabranoj razmeri.

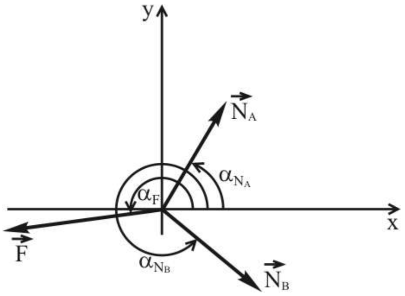
Analitičko određivanje ravnoteže - česticu postavljamo u koordinatni početak. Kako čestica u ovom slučaju može imati 2 stepena slobode kretanja (u pravcu ose x i u pravcu ose y) – zahteva 2 spoljašnje veze, pa postoje 2 uslova ravnoteže:

1) $X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

\- značí nema kretanja ni u pravcu ose x ni y .

2) $Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$

Za slučaj prikazan na slici navedeni izrazi izgledaju:

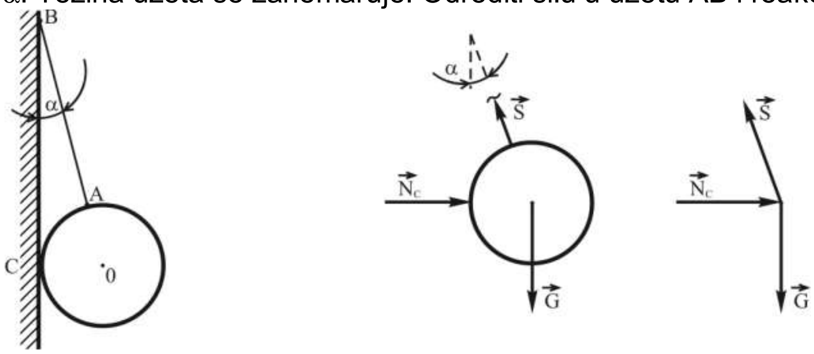


$$1.\sum_{i=1}^{3} X_i = 0 \Rightarrow N_A \cos\alpha_{N_A} + F\cos\alpha_F + N_B \cos\alpha_{N_B} = 0$$

$$2.\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0 \Rightarrow N_A \sin\alpha_{N_A} + F\sin\alpha_F + N_B \sin\alpha_{N_B} = 0$$

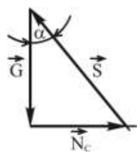
U ovim izrazima nepoznate mogu biti samo dve veličine - najčešće su to veličine reakcija (statički određeni problemi).

Primer 1. Homogena kugla O težine G oslanja se u tački C o vertikalni gladak zid a pridržava se pomoću glatkog i neistegljivog užeta AB koje je u tački B vezano za vertikalni zid gradeći sa njim ugao α. Težina užeta se zanemaruje. Odrediti silu u užetu AB i reakciju zida.



I - način: Prema geometrijskom uslovu ravnoteže ravnog sistema sučeljnih sila potrebno je i dovoljno da ove tri sile obrazuju zatvoren trougao tj.

$\vec{G} + \vec{N}_c + \vec{S} = 0$ Vektorska jednačina (Vektorski zbir sila).

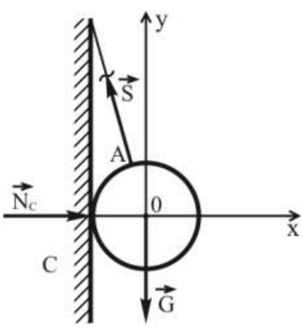


$$\cos\alpha = \frac{G}{S} \Rightarrow S = \frac{G}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{N_C}{S} \Rightarrow ?$$

$$tg\alpha = \frac{N_C}{G} \Rightarrow N_C = G \cdot tg\alpha$$

II - način: Analitičkim putem



Uvođenjem koordinatnog sistema u presečnoj tački napadnih pravaca i postavljanjem uslova ravnoteže

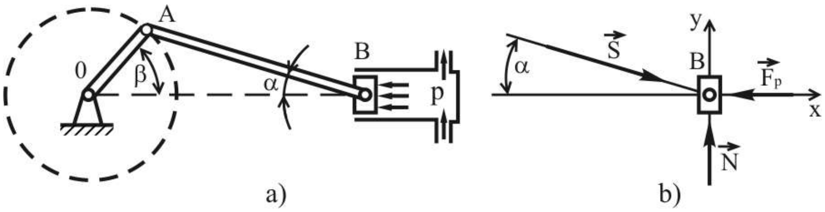
$$1.\sum_{i=1}^{3} X_i = 0 \Rightarrow N_C - S\sin\alpha = 0$$

\- Skalarne jednačine

$$2.\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0 \Rightarrow -G + S\cos\alpha = 0 \Rightarrow S = \frac{G}{\cos\alpha}$$

$$1. \Rightarrow N_C = S\sin\alpha = \frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha = G \cdot tg\alpha$$

Primer 2. Klipna pumpa, šematski prikazana na slici, potiskuje fluid nadpritiska $p = 2kN/cm^2$. Ako je površina klipa $A_k = 50cm^2$, odrediti silu u štapu AB i bočnu silu klipa za slučaj zanemarljivog trenja. Najveći ugao $\alpha_{\max} = 20^0$. Težine delova klipnog mehanizma zanemariti.



Rešenje:

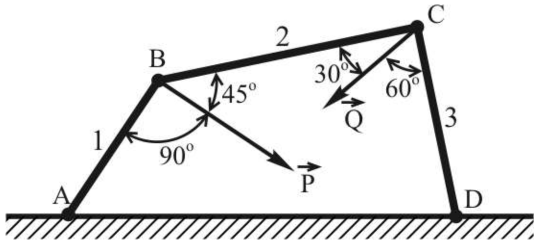
Na klip deluju 3 sile: potisna sila fluida $F_p = p \cdot A_k = 100 kN$, bočna potisna sila $\vec{N}$ i sila u štapu $\vec{S}$.

Napadni pravci ovih sila seku se u istoj tački (sučeljni sistem) pa su jednačine ravnoteže:

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow S\cos\alpha - F_p = 0 \Rightarrow S = \dfrac{F_p}{\cos 20^0} = 106.4 kN$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S\sin\alpha + N = 0 \Rightarrow N = S\sin\alpha = 36.4 kN$

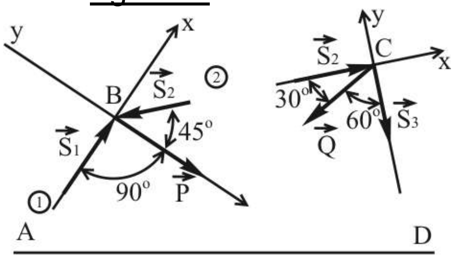
Primer 3. Tri štapa u istoj ravni povezani su zglobovima prema slici. Na njih deluje u tački B sila P=10 daN. Naći veličinu sile Q koja treba da deluje u zglobu C u pokazanom pravcu pa da sistem štapova bude u ravnoteži. Uglovi koji definišu sistem štapova kao i pravce sila dati su na slici.



Rešenje:

Pretpostavimo da su štapovi opterećeni na pritisak zamišljamo da smo ih uklonili i njihov uticaj na zglobove zamenili odgovarajućim silama. Čvor B napadaju 2 sile nepoznatog intenziteta, koje ćemo odrediti primenom uslova ravnoteže ravnog sistema sučeljenih sila. Odgovarajuće jednačine su oblika:

Zglob B:



$$1.\sum_{I=1}^{3} X_i = 0 \Rightarrow S_1 - S_2\sin 45^0 = 0$$

$$2.\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0 \Rightarrow -P + S_2\cos 45^0 = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{P}{\cos 45^0} = \frac{20}{\sqrt{2}} daN$$

$$1. \Rightarrow S_1 = S_2 \sin 45^0 = 10 daN$$

Saglasno aksiomi 1 dejstvo uklonjenog štapa 2 na čvor B jednako je dejstvu na čvor C ali suprotnog smera tj. $\vec{S}_2 = -\vec{S}_2'$.

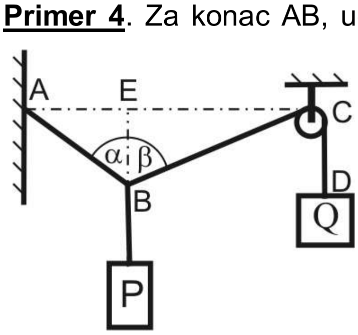
Zglob C:

$$1.\sum_{I=1}^{3} X_i = 0 \Rightarrow S_2' - Q\cos 30^0 = 0 \Rightarrow Q = \frac{S_2}{\cos 30^0} = 20\sqrt{\frac{2}{3}} daN$$

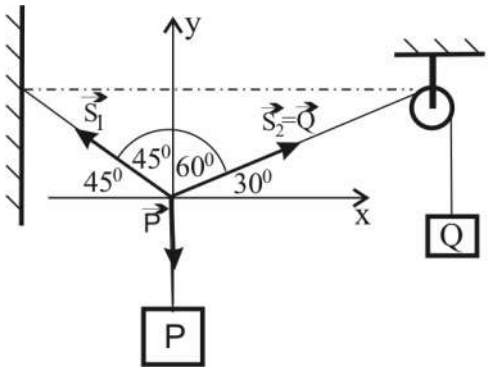
$$2.\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow -S_3 - Q\cos 60^0 = 0 \Rightarrow -S_3 = Q\cos 60^0 = 10\sqrt{\frac{2}{3}} daN$$

$$S_3 = -10\sqrt{\frac{2}{3}} daN$$

Primer 4. Za konac AB, učvršćen je u tački B teg P. Za tačku B učvršćen je drugi konac BCD, prebačen preko nepokretnog kotura i zategnut tegom Q=10N. Odrediti silu u koncu AB i težinu tega P ako je $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$.



Rešenje: Analitičkim putem - uvođenjem koordinatnog sistema u presečnoj tački pravaca sila i postavljanjem uslova ravnoteže. Sila u delu užeta BC jednaka je težini tereta koji uže zateže, tj. $S_2 = Q$.



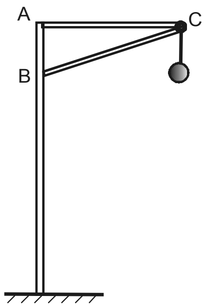
$$1.\ \sum X_i = 0 \Rightarrow Q cos 30^0 - S_1 cos 45^0 = 0$$

$$2.\ \sum Y_i = 0 \Rightarrow Q cos 60^0 + S_1 cos 45^0 - P = 0$$

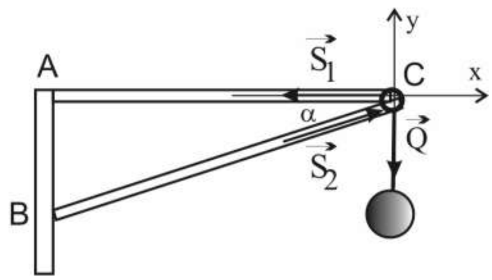
$$1. \Rightarrow 10\frac{\sqrt{3}}{2} - S_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ \rightarrow 10\sqrt{3} = S_1\sqrt{2} \rightarrow S_1 = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 12{,}25N$$

$$2. \Rightarrow 10\frac{1}{2} + S_1\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \rightarrow 10\frac{1}{2} + \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$$

$$5 + 5\sqrt{3} = P \rightarrow \ P = 5 + 5\sqrt{3} = 13{,}65N$$



Primer 5. Svetiljka težine 30N, obešena je za vertikalni stub preko horizontalne grede AC=1,2m i kosnika BC=1,5m. Odrediti veličinu i karakter sila u štapovima AC i BC.



Rešenje:

$$1.\ \sum X_i = 0 \Rightarrow -S_1 + S_2 cos\alpha = 0$$

$$2.\ \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_2 sin\alpha - Q = 0$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{1{,}5^2 - 1{,}2^2} = 0{,}9m$$

$$cos\,\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8 \quad sin\,\alpha = \frac{AB}{BC} = 0{,}6$$

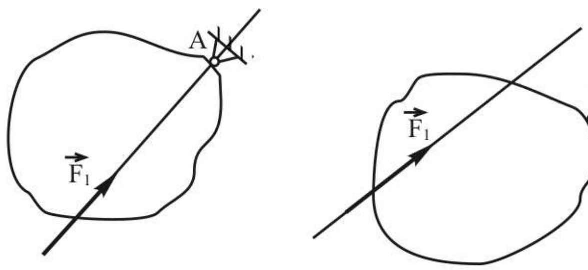
$$2. \Rightarrow 0{,}6S_2 - 30 = 0 \rightarrow \ 0{,}6S_2 = 30 \rightarrow \ S_2 = \frac{30}{0{,}6} = 50N$$

$$1. \Rightarrow -S_1 + 0{,}8S_2 = 0 \ \rightarrow \ 0{,}8S_2 = S_1 \rightarrow \ S_1 = 0{,}8 \cdot 50 = 40N$$

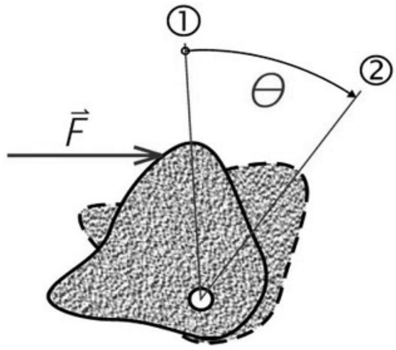
OPŠTI SISTEM SILA I SPREGOVA U RAVNI

Statički moment sile za tačku

Ovde će se proučiti delovanje sile na tačku koja ne leži na pravcu njenog delovanja. Sila $\vec{F}_1$ deluje na ravnu krutu figuru.



a) b)

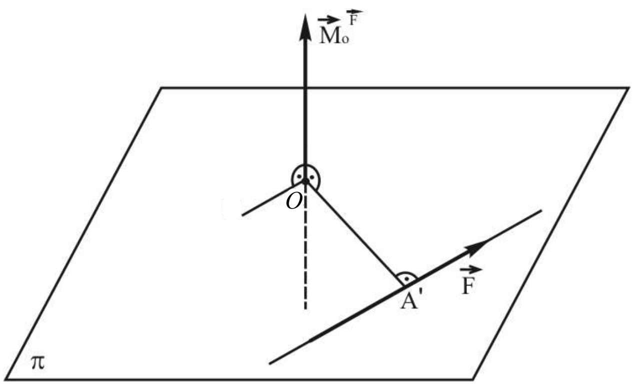


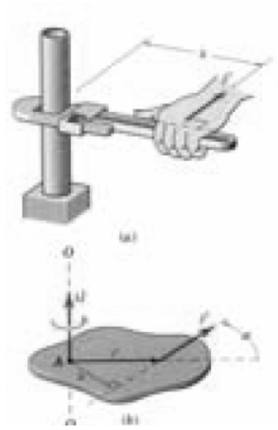
Na slici pod a) figura ostaje u stanju mirovanje jer se sila $\vec{F}_1$ i reakcija veze u zglobu A poništavaju. Za figuru prikazanu na slici b) iz iskustva znamo da neće ostati u stanju mirovanja već će se okretati oko tačke A i to u smeru kretanja kazaljki sata. Okretanje figure bilo bi brže ako bi na nju delovala veća sila ili ako bi pravac delovanja iste sile bio udaljeniji od tačke A.

Opisano delovanje sile $\vec{F}_1$ na tačku A nazivamo statički moment sile za tačku A.

Statički moment sile je vektorska veličina jer ima:

- veličinu koja se može izmeriti ili izračunati
- smer koji je evidentan
- pravac delovanja.





$h = \overline{OA'}$ - dužina normale povučene iz tačke A na pravac delovanja sile - krak sile

$M_O^{\vec{F}} = h \cdot F$ - veličina momenta

Statički moment sile za tačku je proizvod sile i kraka.

Ako je $h = 0 \Rightarrow M_O^{\vec{F}} = 0$

Jedinica statičkog momenta dobija se pomoću izraza

$\left[M\right] = \left[h\right] \cdot \left[F\right] = m \cdot N$

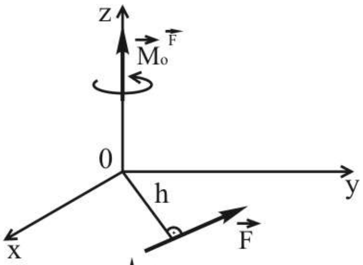
$\left[M\right] = Nm$ - Njutn metar

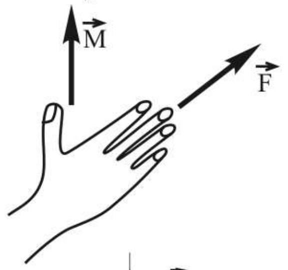
- Pravac delovanja je pravac koji prolazi kroz tačku O a upravan na ravan u kojoj deluje sila. Ovaj pravac odgovara osi rotacije tela na koje deluje sila.

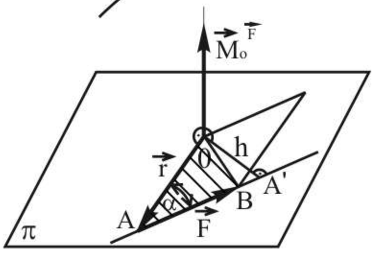
Smer se određuje po pravilu desne ruke. Pravilo desne ruke glasi:

Ako se tačka za koju se određuje statički moment sile nalazi na strani dlana desne ruke onda palac određuje smer kada sile deluju u smeru ostalih prstiju ruke.

Statički moment sile za tačku može se izraziti i pomoću vektorskog proizvoda vektora položaja i vektora sile. Napadna tačka sile u odnosu na tačku za koju se određuje definiše se vektorom položaja $\vec{r}$.







Izraz za moment kao vektorsku veličinu glasi:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Veličina se određuje sa:

$$M_O^{\vec{F}} = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\alpha = h \cdot F$$

$$r \sin\alpha = h$$

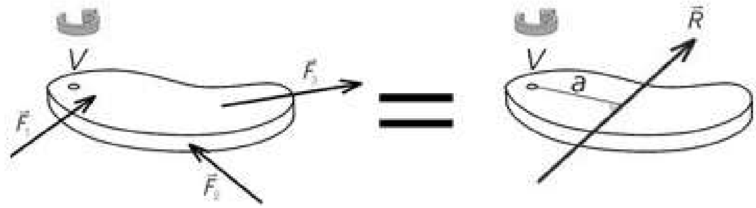
$$M_O^{F} = \pm h \cdot F$$

Vektorski proizvod dva vektora je treći vektor čija je veličina jednaka površini paralelograma konstruisanog nad vektorima kao stranama a pravac upravan na ovu ravan.

Površina paralelograma = dvostrukoj površini trougla OAB

$$M_O^{\vec{F}} = \pm 2 \cdot \text{površina } \Delta OAB$$

Kada više sila imaju statički moment za neku tačku treba odrediti rezultantni moment odnosno izvršiti redukciju momenata. Redukcija se vrši na osnovu **Varinjonove teoreme** koja glasi: statički moment rezultante jednak je zbiru statičkih momenata komponenata (algebarskom ako je sistem sila u ravni, vektorskom ako je prostorni sistem sila) u odnosu na istu tačku.

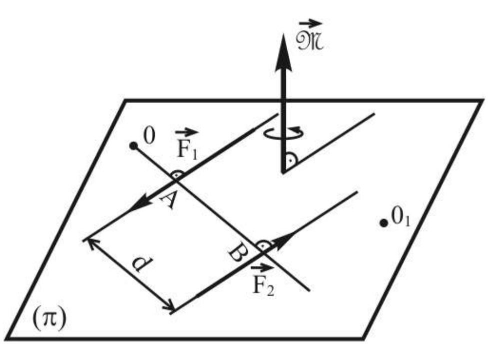


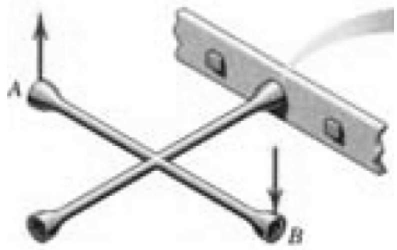
$$M_V^{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{n} M_V^{\vec{F}_i}$$

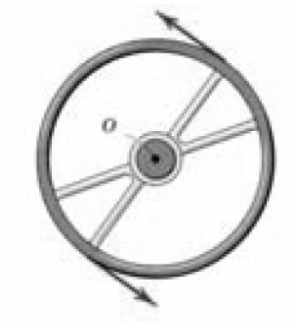
$$R \cdot a = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + ... + F_n \cdot a_n$$

Spreg sila u ravni

Posmatrajmo dve paralelne sile različitog smera koje deluju u ravni π i odredimo njihov moment. Moment od para sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ za tačku O je:







$$M_O^{(\vec{F}_1,\vec{F}_2)} = h_2 F_2 - h_1 F_1 \ (\overline{OA} = h_1; \overline{OB} = h_2)$$

Pretpostavimo da sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ imaju istu veličinu: $F_1 = F_2 = F$, prethodni izraz možemo transformisati: $M_O^{(\vec{F}_1,\vec{F}_2)} = F(h_2 - h_1)$, $h_2 - h_1 = d$ - krak sprega

konačno imamo: $M_O^{(\vec{F}_1,\vec{F}_2)} = F \cdot d = M_{O_1}^{(\vec{F}_1,\vec{F}_2)}$

Iz ovog izraza sledi veoma važan zaključak:

Statički moment dveju paralelnih sila iste veličine a suprotnog smera isti je za bilo koju tačku u ravni u kojoj sile deluju a veličina mu zavisi od udaljenosti pravaca delovanja sila. Ovakav par sila naziva se spreg sila.

Dve paralelne sile iste veličine a suprotnog smera grade spreg sila. Ako momenat sprega označimo simbolom M, onda je:

$$\text{M} = \pm F \cdot d \qquad [M] = Nm$$

Momenat sprega ima znak plus (pozitivan je), kada spreg teži da obrne telo u smeru suprotnom obrtanju kazaljki na satu, i znak - (negativan je), kada spreg teži da obrne telo u smeru obrtanja kazaljki na satu. Momenat sprega, kao i moment sile, meri se Njutn metrima.

Spreg sila je vektorska veličina jer ima:

- veličinu koja se određuje po izrazu $\mathsf{M} = F \cdot d$
- smer koji se određuje analogno kao i smer statičkog momenta sile
- pravac delovanja koji može biti bilo koji pravac upravan na ravan delovanja sprega - spreg je slobodan vektor.

Sile sprega označavaju se istim slovom ali sa različitim predznakom (suprotni smerovi).

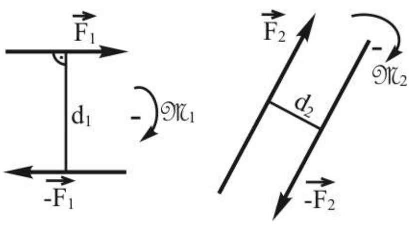
Ekvivalentni spregovi

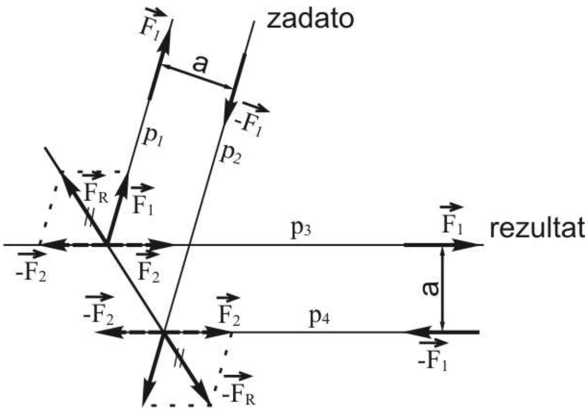
Za dva sprega se kaže da su ekvivalentni ako imaju iste veličine i smer - ekvivalentni spregovi mogu se razlikovati u veličini sila i krakova ali mora biti:

$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \Rightarrow \mathsf{M}_1 = \mathsf{M}_2$

Krakovi ekvivalentnih spregova obrnuto su proporcionalni veličinama sila.

Spreg se može proizvoljno pomicati u ravni.





$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

$\vec{F}_R$ i $-\vec{F}_R$ čine nula silu

Sabiranje spregova

Ako je zadato n spregova koji deluju na neko telo u istoj ravni koje treba sabrati odnosno zameniti sa jednim spregom. Sabiranje spregova može se izvršiti na osnovu činjenice da se od njihovih vektora može formirati kolinearni sistem. Veličina rezultantnog sprega određuje se algebarskim sabiranjem.

$$\mathsf{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \dots\dots\dots + \mathsf{M}_n$$

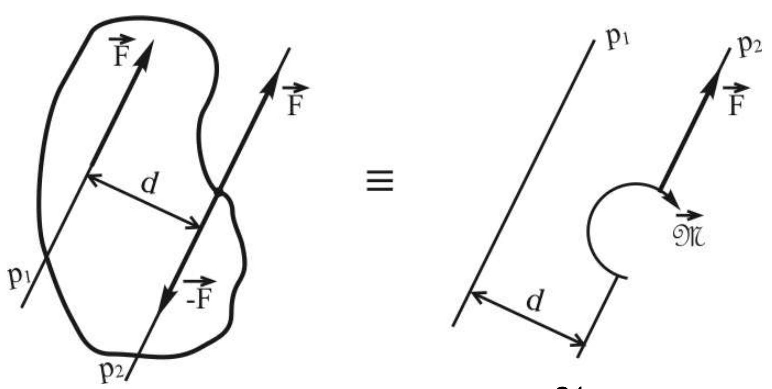
Očigledno da je za ravnotežu tela pod dejstvom ravnog sistema spregova potrebno i dovoljno, da algebarska suma momenata tih spregova bude jednaka nuli

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$

Teorema o paralelnom prenošenju sile:

Silu $\vec{F}$ sa njenog napadnog pravca treba pomeriti na paralelni pravac ali tako da se dejstvo sile na telo ne promeni. Pomeranje je izvršeno tako da su na pravcu p_2 dodate sile $-\vec{F}$ i $\vec{F}$ (nula sila). Sila $\vec{F}$ sa pravca p_1 i $-\vec{F}$ sa pravca p_2 grade spreg momenta $\mathsf{M} = F \cdot d$. Dakle, ako hoćemo silu pomaknuti paralelno to možemo učiniti, a da ne promenimo zadatu situaciju, ako dodamo spreg čiji je moment jednak proizvodu sile i paralelnog pomaka (uslov ekvivalencije).

Spreg sila je simbolički prikazan delom kružnog luka sa označenim smerom obrtanja.



$\mathsf{M} = F \cdot d$

Primer određivanja momenta sile za zadatu tačku

Dati su podaci:

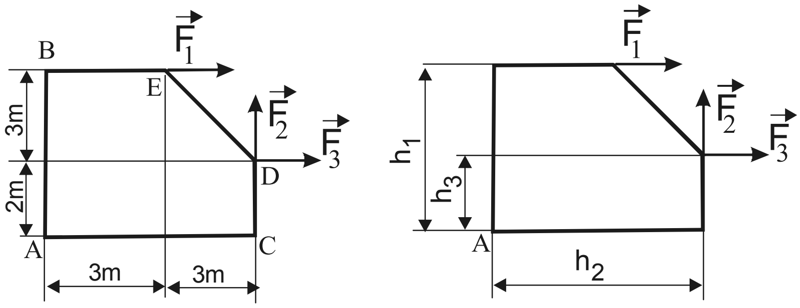
$F_1 = 20kN,\ \ F_2 = 30kN,$

$F_3 = 10kN$

Veličine momenata iznose:

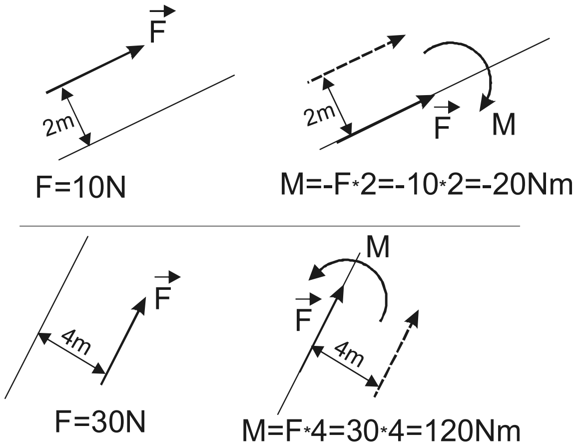
$M_c^{F_2} = 0 \cdot F_2 = 0 \quad M_B^{F_1} = 0 \cdot F_1 = 0$

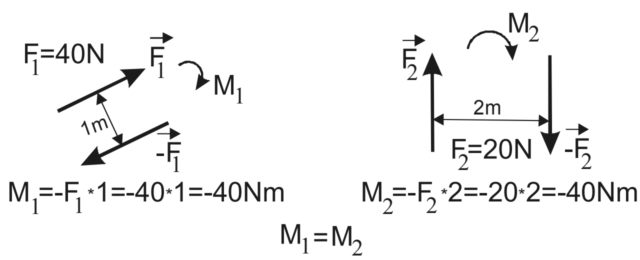
$M_A^{F_1} = -h_1 F_1 = -5 \cdot 20 = -100kNm$



$M_A^{F_2} = +h_2 F_2 = +6 \cdot 30 = 180kNm \qquad M_A^{F_3} = -h_3 F_3 = -2 \cdot 10 = -20kNm$

Primer paralelnog prenošenja sile | **Primer ekvivalentnih spregova**



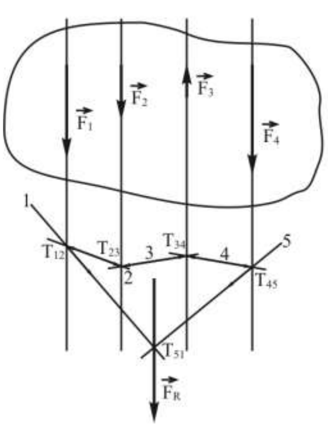


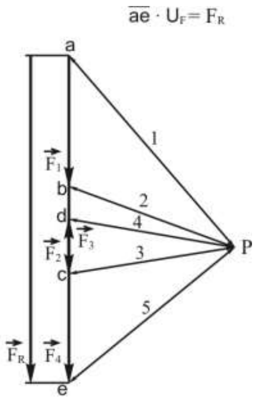
PARALELNI SISTEM SILA U RAVNI

Grafičko svođenje

Odredićemo rezultantu sistema sila onako kako se to izvodi u praksi grafičkim putem

a) plan položaja: $U_L = \dfrac{acm}{1cm}$ b) plan sila: $U_F = \dfrac{bN}{1cm}$





- U prvoj fazi se u planu sila na pravac paralelan pravcu delovanja sile na planu položaja nanesu zadate sile i to redom kako na njih nailazimo u planu položaja. Dužina koja spaja početak prve i kraj zadnje nanešene sile predstavlja rezultantu po veličini i smeru.

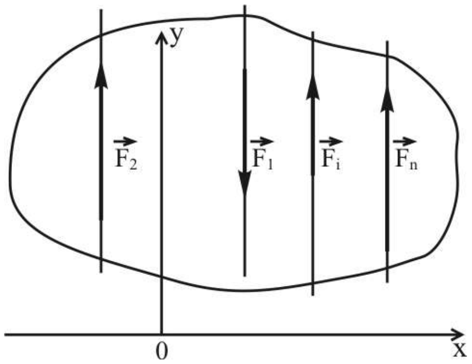
- Sada se izabere pol (tačka) P iz kojeg se povuku dužine do početka odnosno krajeva sila. Ove se dužine nazivaju polni zraci. Zraci koji spajaju početak prve i kraj zadnje nanešene sile su ustvari pomoćne rezultante $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$. Ostali zraci su pomoćne sile koje se dodaju sistemu u parovima čija je rezultanta jednaka nuli ($\vec{F}$ i $-\vec{F}$).

- U trećem koraku se određuje pravac delovanja rezultante u planu položaja konstrukcijom verižnog poligona u konkretnom slučaju, to je poligon sa vrhovima: $T_{1,2}$ $T_{2,3}$ $T_{3,4}$ $T_{4,5}$ i $T_{5,1}$. Konstrukcija verižnog poligona teče ovako:

1. odabere se tačka $T_{1,2}$ i kroz nju se povuku paralele sa polnim zracima 1 i 2 - to su verižnice 1 i 2
2. tačka u kojoj verižnica 2 seče pravac delovanja sile F_2 je tačka $T_{2,3}$
3. kroz tačku $T_{2,3}$ povuče se paralela sa polnim zrakom (3) tako da preseče pravac delovanja sile F_3, itd.
4. na kraju se povlači paralela sa zadnjim polnim zrakom i odredi se presek sa prvom verižnicom $T_{1,5}$. Kroz ovu tačku prolazi pravac delovanja rezultante.

Analitičko svođenje

Kod analitičkog svođenja sučeljenog sistema sila koordinatni početak postavljali smo u tačku u kojoj se seku pravci delovanja svih sila. Kako takva tačka ne postoji za sistem paralelnih sila, moramo koordinatni početak postaviti u neku proizvoljno odabranu tačku. Radi jednostavnijeg postupka projektovanja jednu od osa postavljamo tako da bude paralelna sa pravcem delovanja sila. Paralelnim pomicanjem sila na osu y dobićemo kolinearni sistem sila čija je rezultanta:



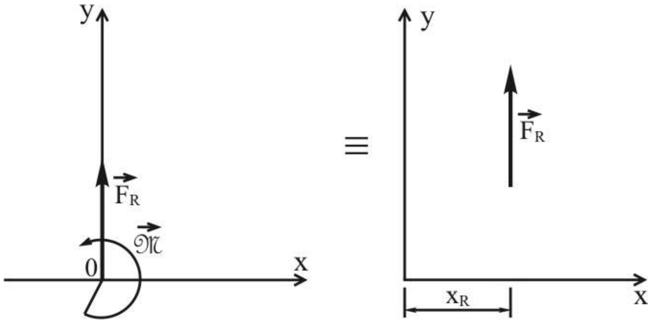
$$F_R = Y_R = \sum F_i$$

Pri pomaku svake sile moramo uvesti redukcioni spreg koji za silu $\vec{F}_i$ iznosi:

$$M_O^{\vec{F}_i} = x_i \cdot F_i$$

a za ceo sistem : (Primenom Varinjonove teoreme uzimajući koordinatni početak za momentnu tačku)

$$M_O^{\vec{F}_R} = \sum_{i=1}^{n} M_O^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i = x_R \cdot F_R$$



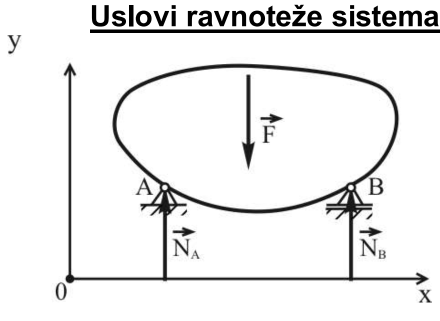
Možemo odrediti veličinu x_R - položaj napadnog pravca F_R.

$$x_R = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{F_R}$$

za koju ćemo paralelno pomeriti rezultantu do pravca njenog delovanja.

Da smo se u biranju tačke za koordinatni početak odlučili za tačku pravca delovanja rezultante redukcioni spreg bio bi jednak 0. Veličina rezultante ne zavisi a veličine redukcionog sprega zavisi od izbora tačke za koordinatni početak.

Uslovi ravnoteže sistema paralelnih sila u ravni



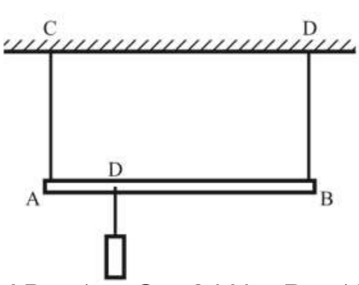
Vezivanjem figure, čije reakcije veza i aktivna sila na nju imaju paralelne pravce, trebamo poništiti dve mogućnosti kretanja, pa se mogu postaviti dva uslova ravnoteže:

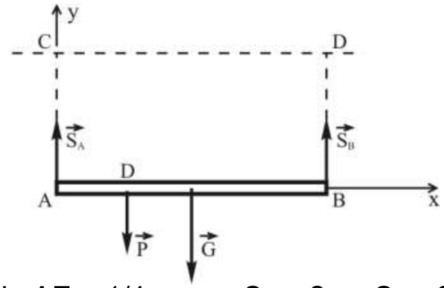
$$1. \sum Y_i = 0$$

$$2. \sum M_{A,B}^{\vec{F}_i} = 0$$

Prvi uslov znači da nema kretanja po pravcu paralelnom osi y dok drugi uslov govori da nije moguća rotacija figure oko ose kroz bilo koju tačku ravni xOy.

Primer 1. Homogeni štap AB dužine 1m, težine G = 2 kN, obešen je horizontalno o dva kanapa AC i BD. Za štap je u tački E obešen teret P = 12 kN. Rastojanje AE = 1/4 m. Odrediti sile S_A i S_B.





AB = 1m, G = 2 kN, P = 12 kN, AE = 1/4m S_A = ? S_B = ?

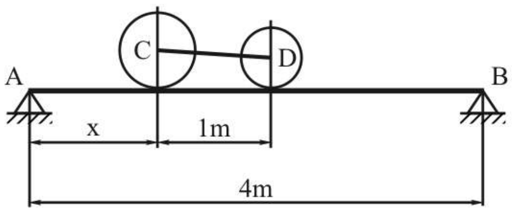
$$1. \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_A + S_B - P - G = 0$$

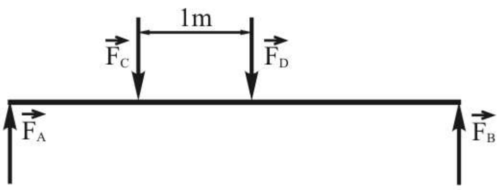
$$2. \sum M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -P \cdot \overline{AE} - G \cdot \frac{\overline{AB}}{2} + S_B \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow S_B = 4kN\ .$$

$$1. \Rightarrow S_A = 10kN$$

Primer 2. Duž horizontalne grede na dva oslonca mogu se pomerati dva tereta, jedan C = 200 kN drugi D = 100 kN. Raspon grede je 4 m , CD = 1m. Na kom rastojanju x od oslonca A mora da se nalazi teret C da bi otpor oslonca A bio dva puta veći od otpora oslonca B. Uticaj težine grede zanemariti.

C = 200 kN
D = 100 kN
$F_A = 2F_B$ - uslov zadatka

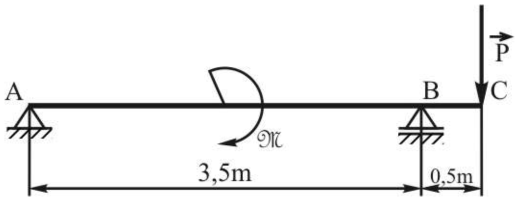




$$1. \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A - F_C - F_D + F_B = 0 \Rightarrow 3F_B = 300 \Rightarrow F_B = 100kN$$

$$2. \sum M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -F_C \cdot x - F_D (x+1) + F_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = 1m$$

Primer3. Datu gredu s jednim prepustom napada između oslonaca spreg sila momenta M =6MNm a u tački vertikalna sila P = 2MN. Odrediti otpore oslonaca.



M $= 6MNm$ F_A = ?
P = 2MN F_B = ?

$$1. \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B - P = 0$$

$$2. \sum M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow - + F_B \cdot 3.5 - P \cdot 4 = 0 \Rightarrow F_B = 4MN$$

$$1. \Rightarrow F_A = -2MN \Rightarrow F_A = 2MN(\downarrow)$$

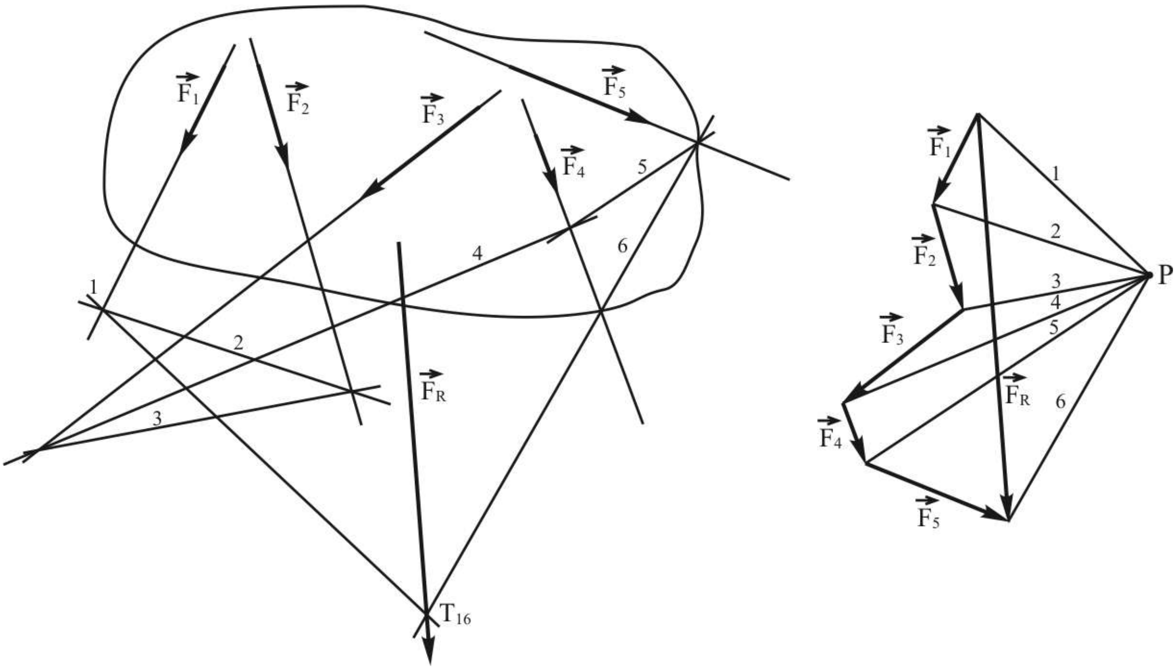
PROIZVOLJNI SISTEM SILA U RAVNI

Proizvoljan ravan sistem sila je takav sistem gde sve sile imaju istu ravan delovanja a različite pravce, napadne tačke i intenzitete. U opštem slučaju proizvoljan ravan sistem sila sastoji se od jednog ili više sučeljenih i jednog ili više sistema paralelnih sila. Za svaki od sučeljenih sistema sila moguće je odrediti rezultantu a za sisteme paralelnih sila ili rezulantu ili rezultantni spreg sila. Postupnim sastavljanjem ovih (sila) rezultanti pomoću zakona o paralelogramu sila(ako im se pravci delovanja seku, ili paralelnim pomicanjem sila, ako su im pravci delovanja paralelni), moguće je odrediti ukupnu rezultantu ili ako je ona jednaka 0 ukupni rezultantni spreg.

Rezultanta se može odrediti:
- analitičkim postupkom
- grafičkim postupkom.

Grafičko svođenje

Postupak je identičan onom opisanom kod paralelnog sistema sila
- veličina rezultante u njen smer određeni su konstrukcijom poligona sila u planu sila,
- za pravac delovanja rezultante određeno je da ono treba prolaziti kroz presečnu tačku prve i zadnje verižnice na planu položaja (tačka $T_{1,6}$) a treba biti paralelan pravcu rezultante određenom u planu sila.



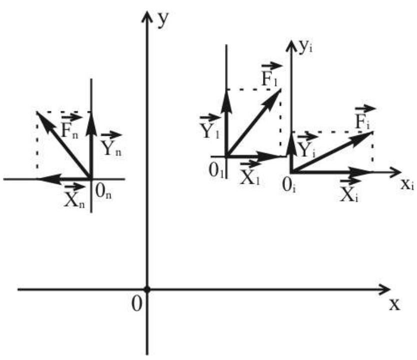
a) plan položaja b) plan sila

Analitičko svođenje

Kod analitičkog svođenja svaka se sila rastavi u dve komponente čiji su pravci delovanja paralelni osama x i y. Nakon ovoga se komponente paralelnim pomicanjem dovedu u ose x i y. Ovako se formiraju dva sistema kolinearnih sila i jedan sistem redukcionih spregova. Sada treba odrediti rezultante kolinearnih sistema i pomoću njih ukupnu rezultantu.

Ovim je određena rezultanta po veličini i smeru a na pravcu koji prolazi kroz koordinatni početak. Njen pravi pravac delovanja odredi se tako što se rezultanta paralelno pomakne dodavši joj rezultantni redukcioni spreg.

Na slici je zadat proizvoljni sistem u opštem slučaju.



Koordinatan početak postavljen je u proizvoljnoj tački. Za svaku silu zadatog sistema sila uvodi se lokalni koordinatni sistem sa koordinatnim početkom u napadnoj tački sile i koordinatnim osama koje su paralelne sa osama x i y. Sada se u lokalnom koordinatnom sistemu određuju projekcije sile F_i:

$$X_i = F_i \cos\alpha_i$$

$$Y_i = F_i \sin\alpha_i$$

Paralelno pomicanje ovih sila vrši se tako što se dodaju statički momenti ovih sila za osu z, odnosno za tačku O:

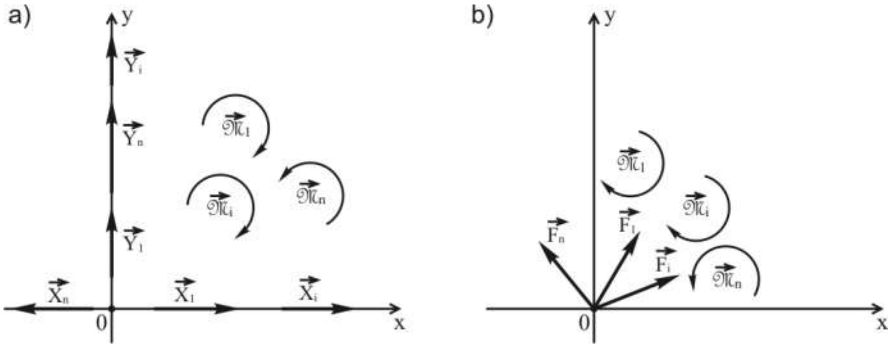
- za pomicanje sile $X_i \rightarrow M_z^{\vec{X}_i} = -y_i \cdot X_i$

- za pomicanje sile $Y_i \rightarrow M_z^{\vec{Y}_i} = x_i \cdot Y_i$

ili ukupni moment redukcionog sprega za paralelni pomak sile F_i

$$M_i = M_z^{\vec{F}_i} = x_i Y_i - y_i \cdot X_i$$

Ovo je analitički izraz za statički moment sile za tačku. Kada se opisani postupak primeni na sve sile može se zadati sistem sila zameniti sa sistemom prikazanim na slici.



Na slici je prikazano da se opšti slučaj komplanarnog sistema sila može uvođenjem redukcionih spregova svesti na sučeljeni sistem.

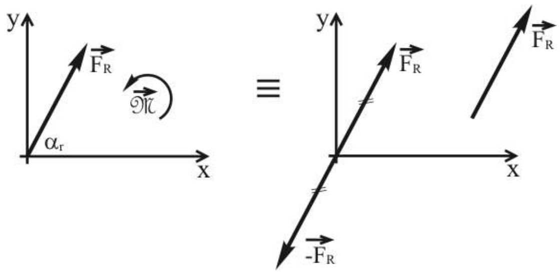
Dalje postupak teče ovako:

- određivanje rezultante po osama x i y

$$X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \,; \qquad Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i$$

- određivanje rezultantnog redukcionog sprega

$$\mathrm{M} = M_z^{F_R} = \sum_{i=1}^{n} M_z^{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i Y_i - y_i X_i \right)$$



ukupna rezultanta sistema je

$$F_R = \sqrt{X_R^{\,2} + Y_R^{\,2}}$$

a njeni kosinusi smerova

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R}{F_R} \;;\; \cos\beta_R = \frac{Y_R}{F_R}.$$

Za potpuno definisanje rezultante treba još odrediti njenu napadnu tačku, odnosno njen napadni pravac. U tu svrhu neophodno je koristiti Varinjonovu teoremu ("Momenat rezultante za neku tačku jednak je algebarskom zbiru momenata svih njenih komponenata za tu istu tačku").

Neka tačka T(x,y) bude napadna tačka rezultante $\vec{F}_R$. Pošto je rezultanta, kao i bilo koja druga sila, klizeći vektor to se ova tačka može uzeti bilo gde na napadnom pravcu rezultante. Birajući koordinatni početak za momentnu tačku možemo pisati:

$$M_O^{\vec{F}_R} = \sum_{i=1}^{n} M_O^{\vec{F}_i}$$

$$xY_R - yX_R = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i Y_i - y_i X_i \right)$$

Sve veličine osim x i y su unapred nađene s obzirom da su x i y na prvom stepenu, predstavlja jednačinu prave u koordinatnom sistemu x0y. Ta prava je traženi pravac vektora rezultante $\vec{F}_R$ (y = kx + n).

$$y = \frac{Y_R}{X_R} x - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i Y_i - y_i X_i \right)}{X_R}$$

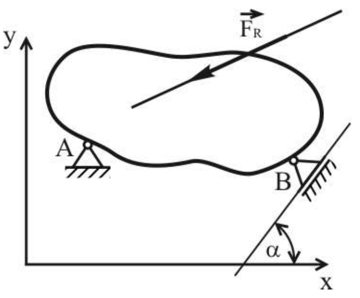
gde su: $k = tg\alpha_R = \dfrac{Y_R}{X_R}$ - koeficijent pravca

$$n = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i Y_i - y_i X_i \right)}{X_R}$$ - odsečak prave na 0y osu.

Ovim izrazima vektor rezultante proizvoljnog ravnog sistema sila je potpuno određen. Kaže se da veličina redukcionog sprega zavisi od tačke u kojoj se postavlja koordinatni početak dok je veličina rezultante ista za sve tačke. Da je koordinatni sistem bio postavljen u bilo koju tačku koja pripada pravcu delovanja rezultante redukcioni spreg bi bio jednak nuli.

Uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila

Uslovi ravnoteže se mogu definisati takođe na dva načina, upravo onako kako je dobijena rezultanta - analitički i grafički.



Da bi proizvoljan ravni sistem sila bio u ravnoteži potrebno je da njegova rezultanta bude jednaka nuli. Rezultanta aktivnih sila može delovati na ravnu krutu figuru po bilo kom pravcu. Kada figura ne bi bila veza pod dejstvom ove sile vršila bi dve translacije;u smeru x i ose y. Vezivanjem figure cilindričnim zglobom u tački A sprečile bi se ove translacije, ali sada figura može rotirati oko ose kroz tačku A. Da bi se sprečilo ovo kretanje dovoljno je figuru vezati dodirnom vezom u tački B. Opisanim vezivanjem figure sprečili smo 3 moguća njena kretanja pa se mogu postaviti 3 uslova ravnoteže:

$1.\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

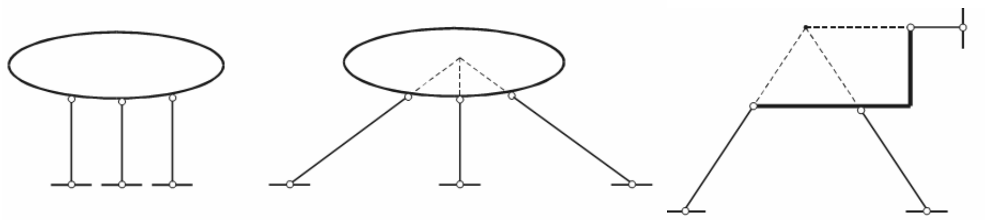
$\Rightarrow F_R = 0$ potreban uslov ravnoteže

$2.\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$

$3.\sum_{i=1}^{n} M_{A,B}^{\vec{F}_i} = 0$ govori da nije moguća rotacija figure oko ose kroz bilo koju tačku ravni xOy – dovoljan uslov

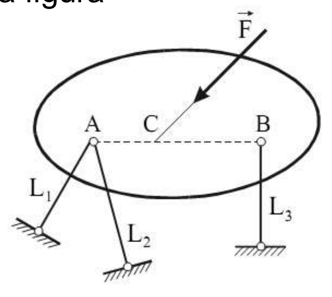
Telo u ravni ima 3 stepena slobode, zahteva 3 spoljašnje veze s podlogom. Telo može imati tri štapne veze sa podlogom pri čemu treba paziti na raspored veza – štapovi ne smeju biti međusobno parelelni i ne smeju se seći u istoj tački.

Primeri neispravno vezanog tela (geometrijski promenljivi sistemi):

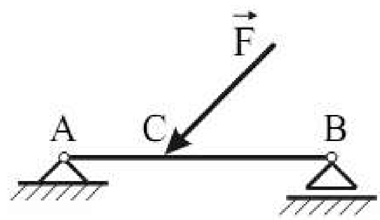


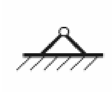
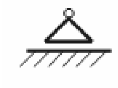
Veoma često se kruta figura zamenjuje jednodimenzionalnim modelom koji se naziva greda. Pravac grede određen je tačkama u kojima se nalaze veze realnog tela. Upogledu pravca opterećenja greda može biti opterećena po svojoj osi, kao i štap, i poprečno na osu.

kruta figura



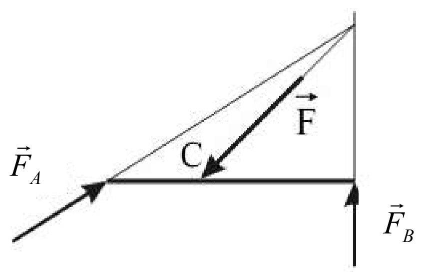
≡

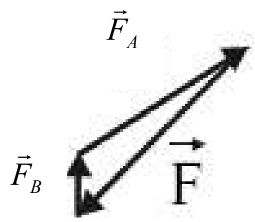


 zglobna veza (dve veze)  klizni ležaj (jedna veza)

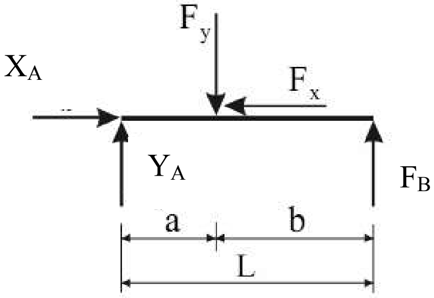
Grafičko uravnoteženje

Trougao sila





Analitičko rešenje:



Jednačine ravnoteže:

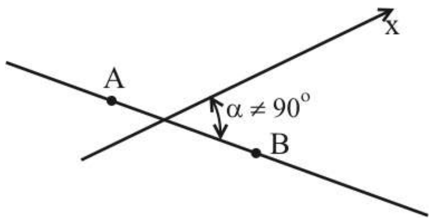
1. $\sum X_i = 0 \rightarrow X_A - F_X = 0$
2. $\sum Y_i = 0 \rightarrow Y_A + F_B - F_Y = 0$
3. $\sum M_A = 0 \rightarrow F_B \cdot L - F_y \cdot a = 0$

$\Rightarrow X_A,\ Y_A,\ F_B$

Navedene tri jednačine predstavljaju osnovni oblik uslova ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila. Nepoznate veličine ravnoteženog stanja određuju se rešavanjem linearnih jednačina koje se formiraju na osnovu uslova ravnoteže. Nepoznate veličine stanja ravnoteže obično su veličine reakcija veza. No to mogu biti i druge veličine, uglovi ili dužine. Važno je da broj nepoznatih ne sme prelaziti broj jednačina ravnoteže jer se linearne jednačine ne bi mogle rešiti. Ako je broj nepoznatih veći od broja jednačina ravnoteža je statički neodređena.

Radi pojednostavljenja izračunavanja vrednosti nepoznatih veličina ravnotežnog stanja koristi se činjenica da je statički moment sile jednak nuli ako je krak sile jednak nuli. Zato se za tačke za koje se formiraju momentne j- ne biraju tačke pravaca delovanja reakcija veza. Ovako pojedine jednačine sistema sadrže manje nepoznatih pa je sistem lakše rešiti.

Navedena osobina statičkog momenta sile dolazi naročito do izražaja kada se ravnoteža određuje pomoću dveju momentnih i jedne komponentne jednačine.



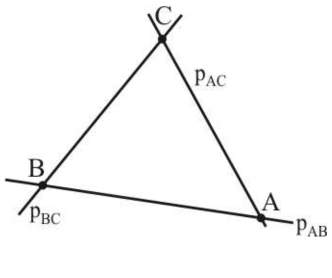
$$1.\sum_{i=1}^{n} M_A^{\vec{F}_i} = 0$$

$$2.\sum_{i=1}^{n} M_B^{\vec{F}_i} = 0$$

$$3.\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

Ovi uslovi ravnoteže vrede kada osa za koju se formira komponentna jednačina nije upravna na pravac koji prolazi tačkama A i B za koji se formiraju momentne j - ne zbog prva 2 uslova sistem sila na figuru ne može se redukovati na spreg, ali može na rezultantu koja leži na pravcu kroz tačke A i B. Pretpostavimo dakle da postoji rezultanta i da leži na pravcu AB uslov $\sum X_i = 0$ govori da rezultanta nema projekciju na osu x. Ovo je ispunjeno u 2 slučaja:

- ako je osa x upravna na pravac AB,



- ako je $\vec{F}_R = 0$.

Kako osa x nije upravna na pravac AB to sledi da je rezultanta jednaka nuli. Takođe
se ravnoteža može odrediti i postavljanjem triju momentnih j-na ali tačke za koje se one formiraju ne smeju ležati na jednom pravcu.

$$1.\sum_{i=1}^{n} M_A^{\vec{F}_i} = 0; \quad 2.\sum_{i=1}^{n} M_B^{\vec{F}_i} = 0; \quad 3.\sum M_C^{\vec{F}_i} = 0$$

Ovi se uslovi ravnoteže dokazuju ovako:

Ako se sistem sila na figuru reducira na rezultantu različitu od onda će po dva od izraza biti zadovoljena, ako $\vec{F}_R$ leži u pravcima p_{AB}, p_{BC} i p_{AC} ali će tada preostali izraz pokazati da $\vec{F}_R$ mora biti jednaka nuli - krak za preostalu tačku nije jednak nuli.

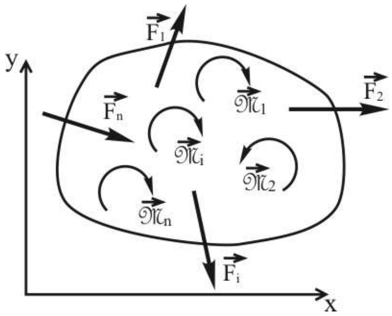
Grafički uslovi ravnoteže bi bili:

$\vec{F}_R = 0$ - poligon sila zatvoren

$\vec{\mathrm{M}}_O = 0$ - verižni poligon zatvoren

Položaj koordinatnih osa birati tako da što veći broj sila bude $\parallel$ ili $\perp$ na koordinatne ose.

Ukoliko u ravni dejstva sila postoje i spregovi oni se moraju algebarski sabrati sa momentima sila za odabranu momentnu tačku. Tako će pomenuta tri oblika uslova ravnoteže u ovom slučaju glasiti:



$$1.\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$2.\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

$$3.\sum_{i=1}^{n} M_{A,B}^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$

$$1.\sum_{i=1}^{n} M_A^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$

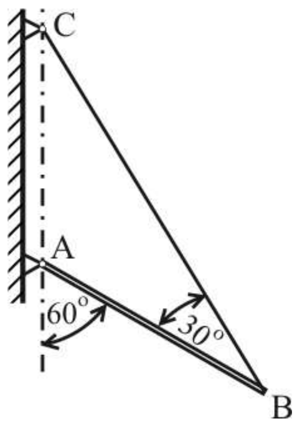
$$2.\sum_{i=1}^{n} M_B^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$

$$3.\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$1.\sum_{i=1}^{n} M_A^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$

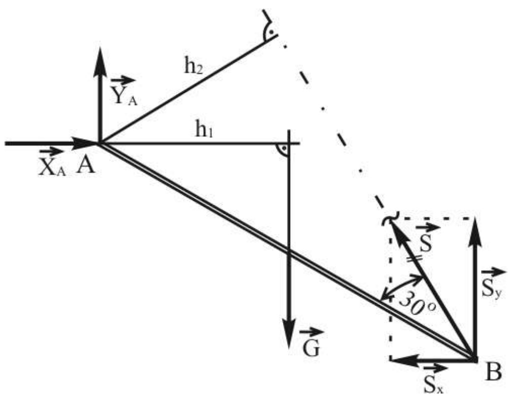
$$2.\sum_{i=1}^{n} M_B^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$

$$3.\sum M_C^{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = 0$$



Primer 1. Homogeni štap AB dužine l i težine G = 2 daN krajem A zglobno je vezan za vertikalni nepokretni zid a krajem B vezan je za neistegljivo uže koje je u tački C vezano za zid. U položaju prikazanom na slici odrediti reakciju zgloba A i užeta BC. Težinu užeta zanemariti.
Rešenje

Komponente reakcije F_A (X_A i Y_A) određuju položaje osa.
Jednačine ravnoteže:



$$1.\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_A - S\cos 60^0 = 0$$

$$.\,2.\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - G + S\cos 30^0 = 0$$

$$3.\sum_{i=1}^{n} M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -G\cdot h_1 + S\cdot h_2 = 0$$

$$\sin 60^0 = \frac{h_1}{l/2} \Rightarrow h_1 = \frac{l}{2}\cdot \sin 60^0 \Rightarrow h_1 = \frac{l\sqrt{3}}{4}$$

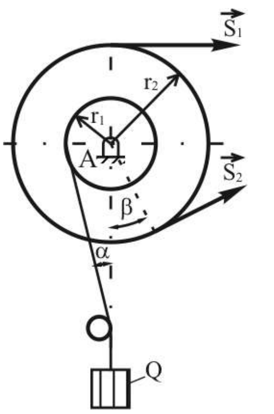
$$\sin 30^0 = \frac{h_2}{l} \Rightarrow h_2 = l\sin 30^0 \Rightarrow h_2 = \frac{l}{2}$$

Rešenja sistema su:

$$3. \Rightarrow S = \sqrt{3}daN,\ 1. \Rightarrow X_A = \frac{\sqrt{3}}{2}daN,$$

$$2. \Rightarrow Y_A = \frac{1}{2}daN$$

Primer 2. Prenosnik prikazan na slici služi za dizanje tereta težine Q posredstvom remena. Koliki se teret može dizati pomoću ovog uređaja i kolika je reakcija u tački A, ako je zadato: S_1 = 350kN, S_2 = 150kN, r_1 = 0.5m, r_2 = 1.5m, α=15^0, $\beta = 30^0$.



Rešenje
Na remenicu deluju poznate sile S_1 i S_2, sila Q poznata po pravcu i smeru i nepoznata reakcija u tački A. Pasivnu silu u tački A izrazićemo preko komponenti X_A i Y_A. Remenica je opterećena proizvoljnim sistemom sila u ravni pa ćemo napisati tri jednačine ravnoteže:

1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + Q\sin\alpha + S_1 + S_2\cos\beta = 0$

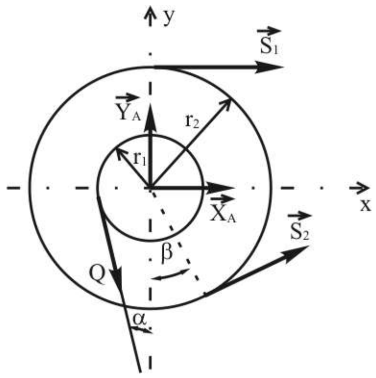
2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - Q\cos\alpha + S_2\sin\beta = 0$

3. $\sum M_A^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -Q\cdot r_1 + S_1\cdot r_2 - S_2\cdot r_2 = 0$

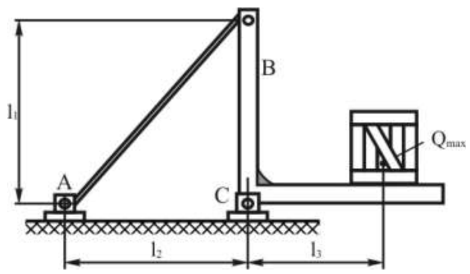
$$3. \Rightarrow Q = \frac{(S_1 - S_2)\cdot r_2}{r_1} = 600kN$$

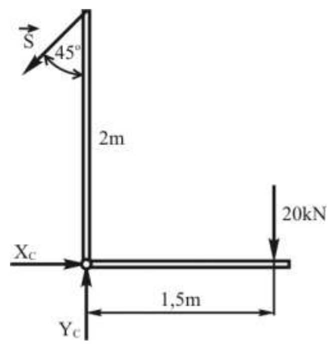
2. $\Rightarrow Y_A = 505kN$

1. $\Rightarrow X_A = 635kN$



Primer 3. Platforma prema slici vezana je zglobno osovinicom u tački C i lakim štapom AB u tački B. Odrediti ukupnu reakciju zglobne veze (silu Fc) i silu u štapu, ako je maksimalna težina tereta koji platforma treba da nosi
Q_{max} =20kN. Poznate su dužine l_1=l_2=2m i l_3=1,5m.
Rešenje:





1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow X_C - S\cos 45° = 0$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_C - 20 - S\cos 45° = 0$

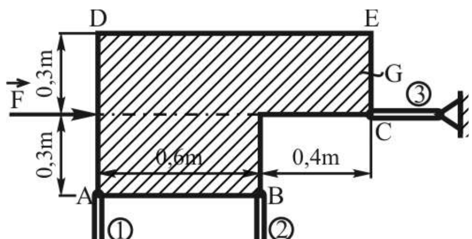
3. $\sum M_A = 0 \Rightarrow S\cdot\cos 45°\cdot 2 - 20\cdot 1{,}5 = 0$

$$S\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 = 30 \Rightarrow \sqrt{2}S = 30 \Rightarrow S = \frac{30}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{S = 15\sqrt{2}kN}}$$

$$1 \Rightarrow X_C = S\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{15kN}}$$

$$Y_C = 20 + 15\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{35kN}} \qquad F_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{15^2 + 35^2} = \underline{\underline{38{,}08kN}}$$

Primer 4. Homogena ploča ABCED konstantne debljine prema slici opterećena je silom F=10kN, a njena težina je G=6kN. Analitički odrediti sile u štapovima 1,2 i 3.
Rešenje: Jednačine ravnoteže



1. $\sum X_i = 0 \Rightarrow S_3 = F = 10kN$

2. $\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 = G$

3. $\sum M_A = 0 \Rightarrow S_2\cdot 0{,}6 - G\cdot x_c + \overbrace{S_3\cdot 0{,}3 - F\cdot 0{,}3}^{=0\left(\vec{S_3}=-\vec{F}\right)} = 0$

$$x_c = \frac{A_1\cdot x_1 + A_2\cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}6\cdot 0{,}6 + 0{,}4\cdot 0{,}3} = \underline{\underline{0{,}425m}}$$

$$3. \Rightarrow S_2 = \frac{G\cdot x_c}{0{,}6} = \frac{6\cdot 0{,}425}{0{,}6} = \underline{\underline{4{,}25kN}}$$

$$2. \Rightarrow S_1 = G - S_2 \Rightarrow S_1 = 6 - 4{,}25 = \underline{\underline{1{,}75kN}}$$