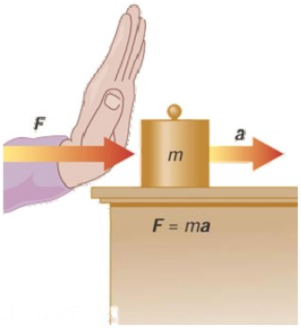
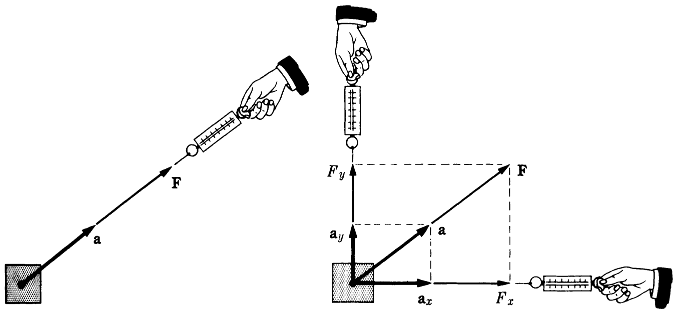
3. DINAMIKA TAČKE

U kinematici je kretanje proučavano sa geometrijskog stanovišta, ne vodeći računa o uzrocima kretanja i materijalnosti; korišćeni su pojmovi dužine i vremena. U dinamici se proučava kretanje tela ali se vodi računa o uzrocima (silama koje izazivaju kretanje) i materijalnosti tela tj. uvode se i pojmovi sile i mase. Dinamika se deli na: dinamiku tačke i dinamiku sistema.
Dinamika tačke je oblast dinamike koja proučava kretanje materijalnih tačaka. Materijalna tačka je telo zanemarljive veličine u odnosu na puteve koje prolazi.

3.1. NJUTNOVI ZAKONI

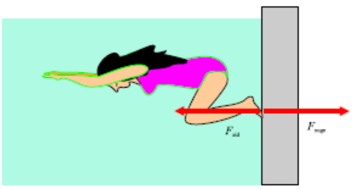
Prvi zakon - ZAKON INERCIJE: *Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja sve dok mu to stanje ne promeni neko drugo telo*. Inercija (lenjost) je težnja tela da zadrži svoje prvobitno stanje (kretanja ili mirovanja). Mera inertnosti tela je njegova masa - za telo veće mase potrebna je veća sila za promenu stanja kretanja (ili mirovanja).
Drugi zakon: *Promena kretanja je proporcionalna sili koja na telo deluje i zbiva se u pravcu dejstva* sile.





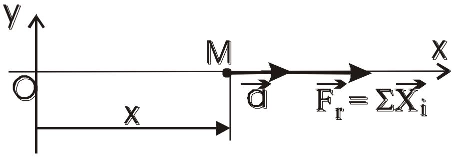
(a) (b)

Ovaj zakon se iskazuje jednačinom: $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$, ako na telo deluje sistem sila: $\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_r}$; kada telo nije slobodno već u kontaktu sa drugim telom (vezom): $\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N}$. Ovde su: $\sum \vec{F}_i^a$ -suma aktivnih sila; $\vec{F}_N$ -reaktivna sila, $\vec{a}$ je vektor ubrzanja (istog pravca i smera kao $\vec{F}$).



Treći zakon - ZAKON DEJSTVA I PROTIVDEJSTVA: *Dejstva dvaju tela jednog na drugo uvek su jednaka i suprotno usmerena*. Po ovom zakonu važi $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$, odnosno $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, ili se može reći da je akciji (dejstvu) suprotna reakcija ili protivdejstvo (uvođeno je kao aksioma u statici). Sile $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ deluju na dva različita tela, javljaju se uvek u parovima.
Četvrti zakon - ZAKON GRAVITACIJE: *Svako materijalno telo privlači drugo materijalno telo silom koja je direktno proporcionalna proizvodu njihovih masa a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja.* Ova privlačna sila je zanemarljivo mala ako su tela malih masa.
$\boxed{F = f\dfrac{m_1 m_2}{r^2}}$, $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 / kg^2$ je gravitaciona konstanta koju je odredio Kevendiš.
Dva zadatka dinamike koja se mogu postaviti i rešiti na osnovu drugog Njutnovog zakona:
1. Poznate jednačine kretanja materijalne tačke zadate mase, treba naći silu koja deluje na tačku. Zato je potrebno izvršiti diferenciranje jednačina kretanja.
2. Poznata sila (rezultanta sistema) koja deluje na materijalnu tačku zadate mase, treba naći jednačine kretanja. U ovom slučaju vrši se integracija.

3.2. PRAVOLINIJSKO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE



Linija putanje tačke je *Ox* osa, sila (rezultanta sila) koja deluje na materijalnu tačku mora biti pravca *Ox* ose: $\vec{F}_r = \sum \vec{X}_i$. Po II Njutnovom zakonu važi: $m\vec{a} = \vec{F}_r$. Projektovanjem na *Ox* osu dobija se: $ma_x = \sum X_i = X_r, m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = \sum X_i = X_r$.

$\Rightarrow$ diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja materijalne tačke $\boxed{m\ddot{x} = \sum X_i}$

a) SILA ZAVISI OD VREMENA ILI JE KONSTANTNA $\boxed{X_r = X_r(t) \ \vee \ X_r = const.}$

Oblik drugog izvoda (I): $\boxed{\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}}$ $\Rightarrow$ dvostruka integracija, konstante se određuju iz početnih uslova (t=0; x_0 - početni položaj; $\dot{x}_0 = v_0$ - početna brzina). Dobija se zavisnost brzine od vremena $\dot{x} = v = \dot{x}(t)$ i zavisnost položaja (kordinate *x*) od vremena $x=x(t)$.

b) SILA ZAVISI OD POLOŽAJA TAČKE $\boxed{X_r = X_r(x)}$

Drugi izvod se piše u obliku (II) koji omogućava razdvajanje promenljivih $\boxed{\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x}}$, $m\ddot{x} = X_r(x)$, $\quad m\dot{x}\,d\dot{x} = X_r(x)dx$, integracijom se dobija $\dot{x} = v = \dot{x}(x)$.

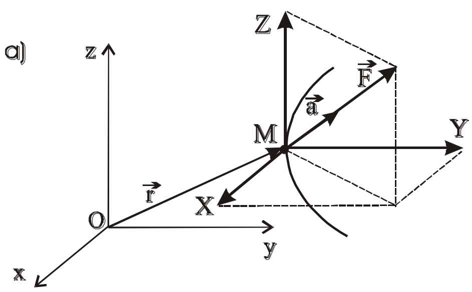
c) SILA ZAVISI OD BRZINE TAČKE $\boxed{X_r = X_r(\dot{x}) = X_r(v)}$.

Drugi izvod može da se izrazi na dva načina u zavisnosti od željenog rezultata.

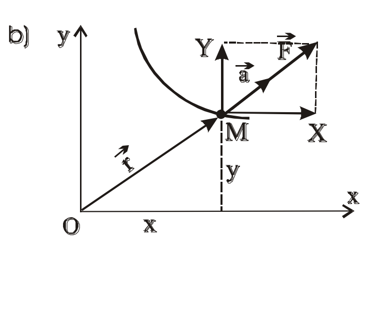
(I): $m\frac{d\dot{x}}{X_r(\dot{x})} = dt$, nakon integracije → $v=v(t)$, (II): $m\frac{\dot{x}d\dot{x}}{X_r(\dot{x})} = dx$ nakon integracije → $v=v(x)$.

3.3. KRIVOLINIJSKO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE

Sila $\vec{F}$ (ili rezultanta $\vec{F}_r = X_r\vec{i} + Y_r\vec{j} + Z_r\vec{k}$,) koja deluje na materijalnu tačku (kao i ubrzanje $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ usmerena u konkavnu stranu putanje) može da zavisi od $\vec{r}$, $\vec{v}$ i t tj. položaja, brzine i vremena. Vektorska jednačina $m\vec{a} = \vec{F}_r$ se može projektovati na ose *x, y* i *z*, i na taj način se dobijaju tri diferencijalne jednačine krivolinijskog kretanja tačke:



$$\boxed{m\ddot{x} = \sum X_i \qquad m\ddot{y} = \sum Y_i \qquad m\ddot{z} = \sum Z_i}$$



Integracijom ovih jednačina pojaviće se 6 konstanata $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6$ koje se određuju iz početnih uslova kretanja: $t = 0$: $x_0, \dot{x}_0$; $y_0, \dot{y}_0$; $z_0, \dot{z}_0$. Dobijaju se zakoni kretanja $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$. Za kretanje u ravni projektovanjem dobijamo dve skalarne jednačine, 4 konstante a početni uslovi su $t = 0$: $x_0, \dot{x}_0$; $y_0, \dot{y}_0$; dobijaju se zakoni kretanja $x=x(t)$ i $y=y(t)$.

3.3.1. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru

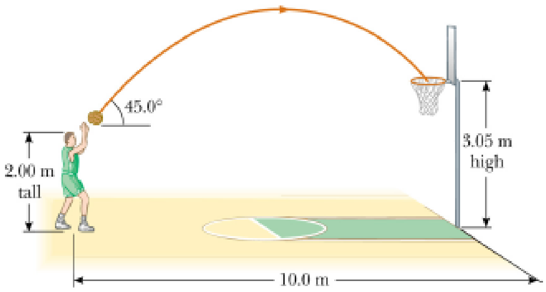
Kretanje se izvodi u vertikalnoj ravni xOy pod dejstvom sile Zemljine teže $\vec{G}=-m g \vec{j}$ sa početnim uslovima: $t=0,\ x_0=y_0=0,\ \dot{x}_0=v_0\cos\alpha,\ \dot{y}_0=v_0\sin\alpha$.

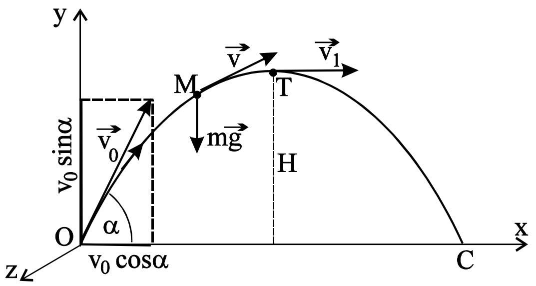
U Ox pravcu dobijamo: $m\ddot{x}=G_x=0,\ \ddot{x}=\dfrac{d\dot{x}}{dt}=0, \Rightarrow \dot{x}=C_1;$ (1)

$$\frac{dx}{dt}=C_1, \int dx=C_1\int dt+C_2, \Rightarrow x=C_1t+C_2. \qquad (2)$$

Korišćenjem uslova: $t=0, \dot{x}_0=v_0\cos\alpha,\ x_0=0;$ dobijaju se integracione konstante $v_0\cos\alpha=C_1;\ 0=C_1 0+C_2,\ \Rightarrow\ C_2=0$. Zamenom u (1) i (2) $\Rightarrow$

projekcija brzine: $\dot{x}=v_x=v_0\cos\alpha$ i jednačina kretanja u Ox pravcu: $\boxed{\mathbf{x=v_0 t\cos\alpha.}}$ (3)





U Oy pravcu dobijamo: $m\ddot{y}=-mg,\ \ddot{y}=\dfrac{d\dot{y}}{dt}=-g, \int d\dot{y}=-g\int dt+C_3, \dot{y}=-gt+C_3;$ (4)

$$\frac{dy}{dt}=-gt+C_3, \int dy=-g\int tdt+C_3\int dt+C_4,\ \ y=-\frac{1}{2}gt^2+C_3t+C_4. \qquad (5)$$

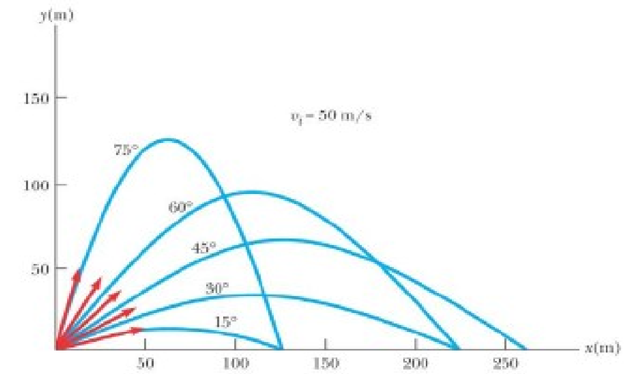
Sa početnim uslovima $t=0, \dot{y}=v_0\sin\alpha, y_0=0;$ dobijaju se konstante:

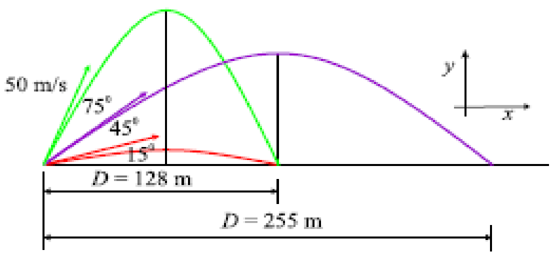
$v_0\cdot\sin\alpha=-g\cdot 0+C_3, \Rightarrow C_3=v_0\sin\alpha;\quad 0=\frac{1}{2}g\cdot 0+C_3\cdot 0+C_4 \Rightarrow C_4=0$. Dalje sledi:

projekcija brzine: $\dot{y}=v_y=v_0\sin\alpha-gt$ i jednačina kretanja u Oy pravcu: $\boxed{\mathbf{y=v_0 t\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2}}$. (6)

Iz jednačina kretanja (3) i (6) sledi: $t=\dfrac{x}{v_0\cos\alpha},\ y=v_0\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha-\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2,$

pa se dobija jednačina putanje (parabole): $\boxed{\mathbf{y=x\,tg\alpha-\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}}}$.





Domet D=OC tj. presek parabole sa Ox osom: $y=x(tg\alpha-\dfrac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha})=0, tg\alpha-\dfrac{gx_C}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0,$

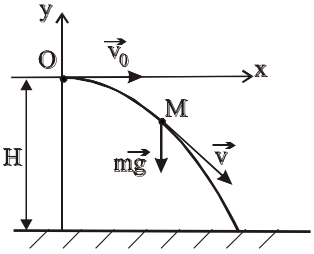
jednak je $\boxed{x_C=D=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}}$. Maksimalni domet ($\sin 2\alpha=1$) dostiže se za $\alpha=45^0$.

Visina penjanja H tj. ordinata tačke T: $v_y = \dot{y} = 0 \rightarrow v_0 \sin\alpha - gt_t = 0 \rightarrow t_T = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$$y_T = H = v_0 t_T \sin\alpha - \frac{gt_t^2}{2} = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 ; \Rightarrow \boxed{y_T = H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}.$$

Najveća visina penjanja (sinα=1) dostiže se za α =90^0 , tj. za vertikalni hitac.

Horizontalni hitac - je kretanje sa horizontalnom početnom brzinom. Iz jednačina kosog hitca smenom: α=0 $(\cos\alpha = 1,\ \sin\alpha = 0,\ tg\alpha = 0)$ dobija se:



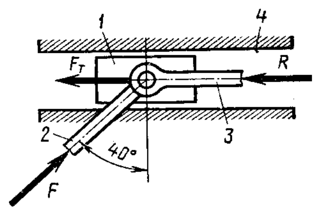
1) $x = v_0 t, y = -\frac{1}{2} gt^2,$ jednačine kretanja tačke

2) $v_x = \dot{x} = v_0,\ v_y = \dot{y} = -gt,$ projekcije brzine;

3) $\boxed{y = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2}}$ jednačina putanje tačke.

3.4. ZADACI (II NJUTNOV ZAKON, JEDNAČINE KRETANJA)

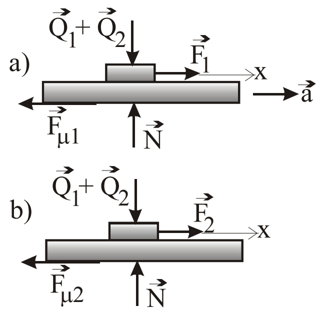
ZADATAK 3.1. (**II Njutnov zakon**): Klizač 1 mase *m=20kg*, na koga deluje pogonska poluga 2 silom *F=150N*, kreće se u vođicama 4. Odrediti ubrzanje klizača ako je sila trenja u vođicama jednaka F_T=40N a sila otpora sa strane klipnjače jednaka je *R=100N*.



Rešenje: Prema II Njutnovom zakonu možemo pisati: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_T$ (sila G=mg nije prikazana jer ima pravac upravan na pravac kretanja klizača). Ako pretpostavimo da je smer ubrzanja udesno, projektovanjem jednačine dobijamo: $ma = F\,sin 40^0 - R - F_T$.

$$a = \frac{1}{m}\left(F\,sin 40^0 - R - F_T\right) = \frac{1}{20}(150 \cdot 0{,}6428 - 100 - 40) = -2{,}18 \frac{m}{s^2}.\ \text{(usporenje)}$$

ZADATAK 3.2. (**II Njutnov zakon**): Za jednu rendisaljku su dati podaci: težina radnog stola Q_1=7kN, težina predmeta koji se obrađuje Q_2=3kN, brzina kretanja radnog stola *v=0,5m/s*, vreme potrebno za postizanje radne brzine *t=0,5s*. Odrediti brojnu vrednost sile F_1, potrebne za postizanje radne brzine ako je kretanje jednako ubrzano sa koeficijentom trenja μ_1=0,14. Zatim odrediti brojnu vrednost sile F_2 potrebne za dalje, ravnomerno kretanje sa koeficijentom trenja μ_2=0,07.

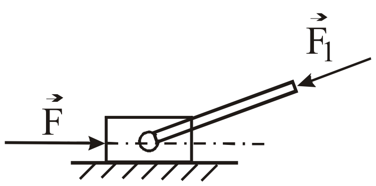


Rešenje: a) Za jednako ubrzano kretanje (sa v_0=0) važi: $v = v_0 + at$ $\rightarrow v = 0 + at \rightarrow a = \dfrac{v}{t} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \dfrac{m}{s^2}$. Ukupna masa radnog stola i predmeta jednaka je: $m = \dfrac{Q_1 + Q_2}{g} = \dfrac{7000 + 3000}{9{,}81} = 1019{,}4 kg$. Normalna reakcija jednaka je $N = Q_1 + Q_2$ a sila trenja $F_{\mu 1} = \mu_1 N = \mu_1(Q_1 + Q_2) = 0{,}14 \cdot 10000 = 1400N$. Prema II Njutnovom zakonu biće:

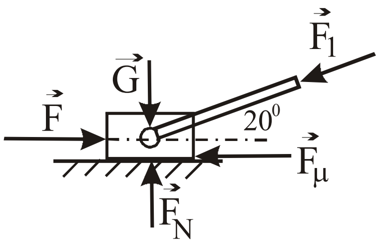
$$ma = F_1 - F_{\mu 1} \rightarrow F_1 = ma + F_{\mu 1} = 1019{,}4 \cdot 1 + 1400 = 2419{,}4N = 2{,}42kN.$$

b) Pri ravnomernom kretanju će sila trenja biti jednaka $F_{\mu 2} = \mu_2 N = \mu_2(Q_1 + Q_2) = 0{,}07 \cdot 10000 = 700N$.

Sada se može pisati statički uslov ravnoteže: $\sum X_i = 0;\ \ F_2 - F_{\mu 2} = 0 \rightarrow F_2 = F_{\mu 2} = 700N = 0{,}7kN$.



ZADATAK 3.3. (**II Njutnov zakon**): Klip mase $m=10kg$ kreće se udesno a koeficijent trenja između klipa i horizontalne površine iznosi 0,3. Kretanju se suprotstavlja sila $F_1=1,19kN$ u poluzi, pod uglom 20^0. Izračunati veličinu sile F kojom treba da se deluje na klip da bi se ostvarilo ubrzanje klipa $a=20m/s^2$.



Rešenje: $F_1=1,19kN=1190N$

Primenom II Njutnovog zakona dobija se:

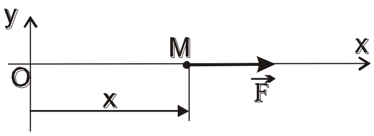
$$m\ddot{y} = -mg + F_N - F_1\sin 20^0 \rightarrow 0 = -10\cdot 9,81 + F_N - 1190\cdot 0,342$$

$$F_N = 98,1 + 407 = 505,1N \qquad F_\mu = \mu F_N = 0,3\cdot 505,1 = 151,53N$$

$$m\ddot{x} = ma = F - F_\mu - F_1\cos 20^0 \rightarrow 10\cdot 20 = F - 151,53 - 1190\cdot 0,939$$

$$200 = F - 1269 \quad \rightarrow \quad F = 1269 + 200 = 1469N = 1,469kN$$

ZADATAK 3.4. (**Jednačina pravolinijskog kretanja**): Materijalna tačka M, mase $m=5kg$, kreće se duž horizontalne Ox ose pod dejstvom sile $\vec{F} = 15t\,\vec{i}$. Naći zakon kretanja tačke. Početni uslovi su: $t_o = 0,\ x_o = 0\ ,\ \dot{x}_o = v_o = 0.$



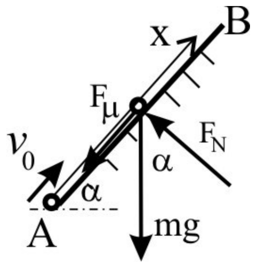
Rešenje: $m\ddot{x} = 15t,\ d\dot{x} = \frac{15}{m}tdt,\ \int_0^v dv = 3\int_0^t tdt,\ v = \dot{x} = \frac{3}{2}t^2$ -brzina.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}t^2,\quad \int_0^x dx = \frac{3}{2}\int_0^t t^2 dt \Rightarrow x = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{2}$$ -jednačina kretanja tačke.

ZADATAK 3.5. (**Jednačina pravolinijskog kretanja**): Materijalna tačka M, mase $m=2kg$, počinje kretanje iz tačke A, početnom brzinom $v_0 = 8m/s$, uz hrapavu strmu ravan CB (nagiba $\alpha=60^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,35$). Napisati jednačinu kretanja tačke po strmoj ravni.

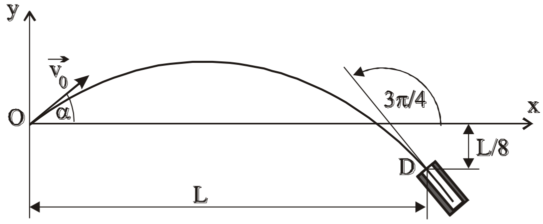
Rešenje:

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja uz strmu ravan glasi: $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F_\mu$, gde je $F_\mu = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha$, pa sledi $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,\ \ \ddot{x} = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha,$ a nakon zamene brojnih vrednosti dobija se $\ddot{x} = -9,81\cdot\sin 60^0 - 0,35\cdot 9,81\cdot\cos 60^0 \rightarrow \boxed{\ddot{x} = -10,2}$.



Sledi dvostruka integracija, pri čemu su početni uslovi $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0 = 8m/s$:

$\ddot{x} = -10,2 \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -10,2 \rightarrow \int d\dot{x} = -10,2\int dt \rightarrow \dot{x} = -10,2t + C_1$. Za t=0 i $\dot{x}_0 = 8m/s$ dobija se C_1=8. Dalje je: $\dot{x} = -10,2t + 8 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -10,2t + 8 \rightarrow \int dx = \int(-10,2t + 8)dt \rightarrow x = -10,2\frac{t^2}{2} + 8t + C_2$ pa je za $t=0,\ x_0=0$ i C_2=0. Konačno jednačina kretanja uz strmu ravan CB glasi $\boxed{x = -5,1t^2 + 8t}$.



ZADATAK 3.6. (**Kosi hitac**): Pod kojim uglom α i kojom početnom brzinom v_0 treba baciti tačku M, mase m, pa da ona u tački D uđe u cev, koja zaklapa ugao $\beta = 3\pi/4 = 135^0$ sa Ox osom? Tačka D se nalazi na udaljenju $L=16m$ i na visini $L/8=2m$ ispod Ox ose. Otpor vazduha zanemariti.

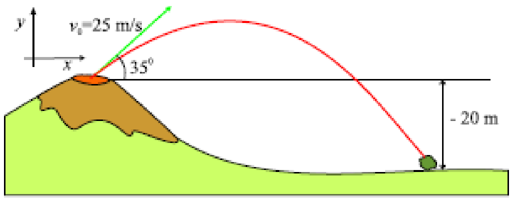
Rešenje: Zadate koordinate tačke D $x_D = L = 16,\ y_D = -L/8 = -2$, moraju zadovoljiti jednačinu putanje kosog hitca; tangenta na putanju u tački D mora se poklapati sa pravcem ose cevi, pa sledi:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \quad -2 = 16tg\alpha - \frac{g\cdot 16^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$y' = tg\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}, \quad -1 = tg\alpha - \frac{g\cdot 16}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Množenjem druge jednačine sa (-8) i sabiranjem sa prvom jednačinom dobija se $tg\alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

Iz druge jednačine, posle zamene nađenog ugla, sledi $v_0^2 = 140{,}1$.



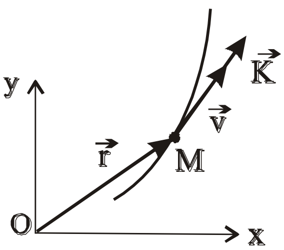
ZADATAK 3.7. (**Kosi hitac**): Vulkan je izbacio veliku stenu početnom brzinom *25m/s*, pod uglom 35^0 u odnosu na horozontalu. Stena pada na površinu Zemlje koja je na *20m* manjoj nadmorskoj visini od vrha kratera. Odrediti vreme potrebno steni da pređe ovaj put.

Rešenje: Zamenom podataka za koordinatu tačke, ugao i početnu brzinu u jednačinu kretanja u *y* pravcu sledi:

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad -20 = 25t\cdot\sin 35^0 - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81t^2 \quad \rightarrow \quad -20 = 14{,}34t - 4{,}9t^2$$

$$4{,}9t^2 - 14{,}34t - 20 = 0 \;\rightarrow\; t_{1,2} = \frac{14{,}34 \pm \sqrt{14{,}34^2 - 4\cdot 4{,}9\cdot(-20)}}{2\cdot 4{,}9} = \frac{14{,}34 \pm 24{,}45}{9{,}8}, \quad t_1 = 3{,}96s$$

3.5. OPŠTI ZAKONI DINAMIKE TAČKE



Primenom ovih zakona se mogu rešavati zadaci dinamike bez integraljenja, ali se ovi zakoni ne mogu primenjivati u svim slučajevima.

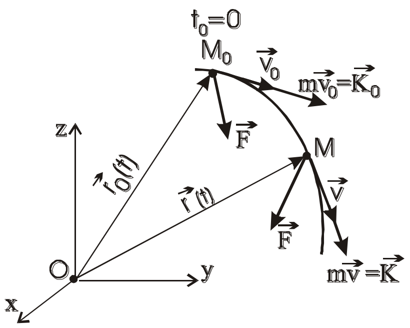
Količina kretanja materijalne tačke $\boxed{\vec{K} = m\vec{v}}$ je vektorska veličina; ima pravac i smer vektora brzine a intenzitet je jednak $K=mv$. Vektor $\vec{K}$ se može razložiti na komponente: $\vec{K} = \vec{K}_x + \vec{K}_y$ i projektovati na ose: $K_x = m\dot{x},\ K_y = m\dot{y}$. Jedinica mere je *Ns*.

Kinetička energija tačke $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$ je skalarna veličina, uvek pozitivna, jedinica *Nm=J*.

Impuls sile $\boxed{d\vec{I} = \vec{F}dt}$ je vektor, ima pravac i smer sile, to je karakteristika dejstva sile u određenom vremenskom intervalu. Jedinica mere je *Ns*. Impuls sile za konačan vremenski interval biće $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} d\vec{I} = \int_{t_0}^{t}\vec{F}dt$. Izračunavanje impulsa sile je moguće ako je sila konstantna kada je $\boxed{I=Ft}$ ili ako je sila funkcija vremena.

3.5.1. Zakon o promeni količine kretanja

Iz II Njutnovog zakona $m\vec{a} = \vec{F}$ sledi: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$, $\quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \dot{\vec{K}} = \vec{F}$, $d\vec{K} = \sum \vec{F}_i dt = \sum d\vec{I}_i$



a integracijom se dobija $\boxed{\vec{K}-\vec{K}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0=\sum \vec{I}_i}$

<u>zakon o promeni količine kretanja:</u> *promena količine kretanja tačke za vremenski interval jednaka je vektorskom zbiru impulsa svih sila koje deluju na tačku a za isti interval.*

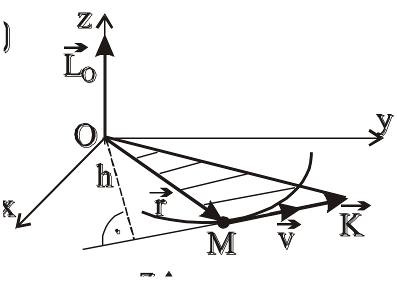
Projektovanjem: $K_x-K_{0x}=\sum I_{ix};\ K_y-K_{0y}=\sum I_{iy}$.

<u>*Zakon o održanju količine kretanja*:</u> kada je sila (ili rezultanta) jednaka nuli kretanje je jednoliko tj. $\sum \vec{F}_i=0$ $\rightarrow$ $\frac{d\vec{K}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{K}=m\vec{v}=const, \Rightarrow \vec{v}=const.$

3.5.2. <u>Zakon o promeni momenta količine kretanja</u>

<u>Moment količine kretanja</u> materijalne tačke $\vec{L}_O$ za tačku O (analogno momentu sile za tačku $\vec{M}_O^{\vec{F}}=\vec{r}\,x\,\vec{F}$) je vektorski proizvod vektora položaja $\vec{r}$ i vektora količine kretanja $\vec{K}=m\vec{v}$:

$$\vec{M}_O^{\vec{K}}=\vec{L}_O=\vec{r}x\vec{K}=\vec{r}xm\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z}\end{vmatrix} \rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}xm\vec{v})=\vec{v}x\vec{K}+\vec{r}xm\vec{a}\,,\quad \vec{v}\,x\,\vec{K}=\vec{v}\,x\,m\vec{v}=0\,,$$



$m\vec{a}=\vec{F}$, $\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{r}x\vec{F}=\vec{M}_O^{\vec{F}}$. Konačno važi: $\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}}$

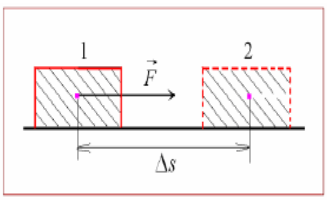
<u>Zakon o promeni momenta količine kretanja:</u> *izvod momenta količine kretanja, u odnosu na nepokretni pol, po vremenu jednak je momentu sile, u odnosu na isti pol.*

Projektovanjem se dobija: $\frac{dL_x}{dt}=\sum M_x^{\vec{F}_i},\frac{dL_y}{dt}=\sum M_y^{\vec{F}_i}$.

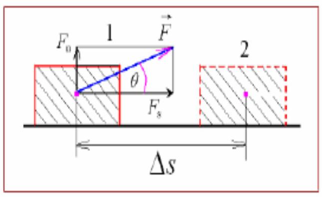
<u>*Zakon o održanju momenta količine kretanja*</u>: $\frac{d\vec{L}_O}{dt}=0,\Rightarrow \vec{L}_O=const.$, tj. $\frac{dL_z}{dt}=0,\Rightarrow L_z=const.,..$.

3.5.3. <u>Rad sile. Snaga</u>

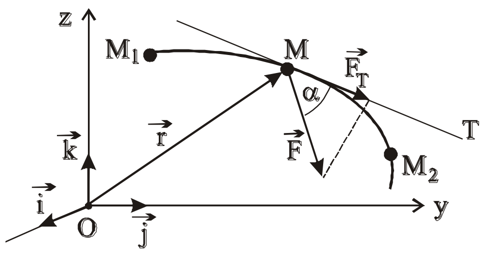
Sila vrši rad ako menja svoju napadnu tačku. <u>Elementarni rad</u> sile jednak je: $d\mathbf{A}=\vec{F}\cdot d\vec{r}$, tj. $\boxed{d\mathbf{A}=Fds\cos\alpha=F_T ds.}$ <u>Jedinica za rad</u> *1Nm=1J.* Pošto su vektori sile i pomeranja jednaki $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k},\ d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k};$ elementarni rad ima oblik: $d\mathbf{A}=Xdx+Ydy+Zdz.$



A=*F·Δs*



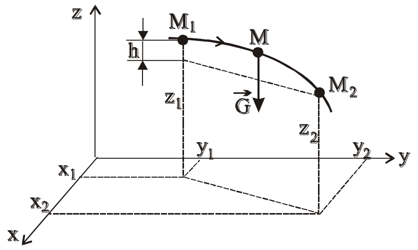
A=$F_s\cdot\Delta s$



<u>Zavisno od ugla α</u> između vektora pomeranja i vektora sile, rad može biti pozitivan (ako je ugao α oštar), jednak nuli (sila upravna na pravac pomeranja) i negativan (ako je ugao α tup).

<u>Ukupni rad sile</u> na putu s, odnosno putu M_1M_2: $\mathbf{A}_{(M_1M_2)}=\int_{(M_1)}^{(M_2)}(Xdx+Ydy+Zdz).$

Snaga P je rad izvršen u jedinici vremena $\boxed{P = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = \dfrac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = M\cdot\omega}$, snaga je skalarni proizvod vektora sile i brzine, ili momenta sile i ugaone brzine. Jedinica za snagu *1W=1J/s*.



a) Rad sile Zemljine teže

$\vec{G} = -G\vec{k};\ G_x = 0, G_y = 0, G_z = -G,$

$$\mathbf{A} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (Xdx + Ydy + Zdz) \;\longrightarrow\; \mathbf{A} = Gh = mgh.$$

Ako je tačka M_1 ispod $M_2 \Rightarrow \mathbf{A} = -Gh = -mgh$.

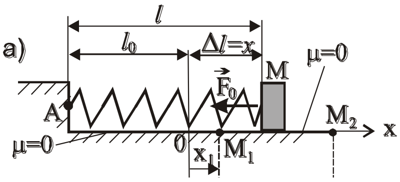
Opšti izraz za rad sile Zemljine teže $\boxed{\mathbf{A} = \pm Gh = \pm mgh.}$

Rad sile teže je pozitivan ako tačka ide sa višeg na niži nivo, a negativan je ako tačka ide sa nižeg na viši nivo. Rad sile teže ne zavisi od dužine puta ni od oblika putanje po kojoj se tačka kreće, već samo od visinske razlike. Sile koje imaju takvo svojstvo nazivaju se *konzervativne* sile.

b) Rad elastične sile opruge

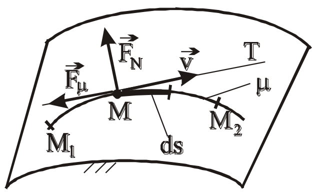
Sila opruge: $F_o = c|\Delta l| = c|x|$. Krutost opruge c je brojno jednaka sili potrebnoj da izduži (sabije) oprugu za jedinicu dužine. Sila F_0 nije konstantna, usmerena je uvek tako da vrati tačku M u ravnotežni položaj. Elementarni rad sile opruge jednak je:

$$d\mathbf{A} = F_0 dx = -cxdx \Rightarrow \mathbf{A} = \int_{M_1}^{M_2} d\mathbf{A} = -c\int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2).$$



Rad sile opruge je negativan kada se opruga udaljava od ravnotežnog položaja O a pozitivan kada se približava položaju O. Rad sile opruge za pomeranje kraja opruge od ravnotežnog ($x_1=0$) do nekog konačnog položaja $x_2=f$ jednak je: $\boxed{\mathbf{A} = \pm\frac{1}{2}cf^2}$

c) Rad sile trenja

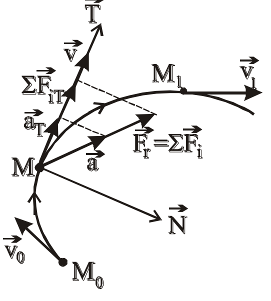


Sila trenja se pojavljuje kada se tačka kreće po hrapavoj podlozi, ima karakteristike: intenzitet $\boxed{F_\mu = -\mu F_N}$ (μ-koeficijent trenja klizanja), pravac tangente na podlogu, smer suprotan smeru kretanja tačke.

Rad sile trenja je uvek negativan i računa se: $\mathbf{A} = \int_{M_1}^{M_2} F_\mu ds = -\int_{M_1}^{M_2} \mu F_N ds.$

Rad konstantne sila trenja jednak je: $\boxed{\mathbf{A} = -\mu F_N \cdot s = -F_\mu \cdot s,}$ gde je s pređeni put (luk M_1M_2) .

3.5.4. Zakon o promeni kinetičke energije tačke



Iz II Njutnovog zakona $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$; projektovanjem na pravac tangente:

$$ma_T = \sum F_{iT}\ ;\ a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v. \quad mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{iT} \Rightarrow$$

$$m\int_{v_0}^{v_1} vdv = \sum \int_{M_0}^{M_1} F_{iT}ds, \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum\int_{M_0}^{M_1} d\mathbf{A}_i, \quad \boxed{E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathbf{A}_i.}$$

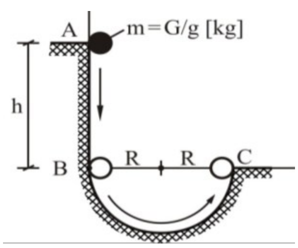
Zakon o promeni kinetičke energije tačke: *priraštaj kinetičke energije pri pomeranju jednak je algebarskom zbiru radova sila koje na tačku deluju, na tom pomeranju.*

$\sum \mathbf{A}_i$ uključuje radove aktivnih sila i reaktivnih sila koje rad vrše (npr. sila trenja).

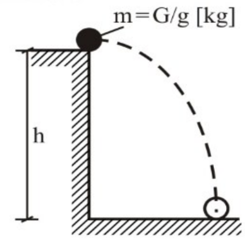
3.6. PRINUDNO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE

Primeri kretanja

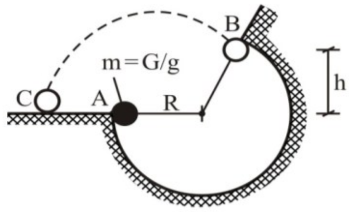
-po prinudnoj putanji:



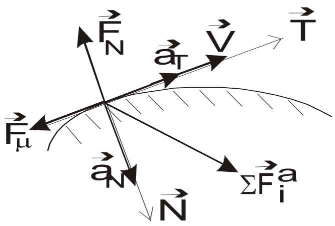
- po slobodnoj putanji:



-po prinudnoj i po slobodnoj putanji:



Kada se tačka kreće slobodno ima tri stepena slobode, njene koordinate zavise samo od vremena. Tela koja ograničavaju slobodno kretanje (smanjuju broj stepeni slobode) su *mehaničke veze*, a kretanje tačke po vezama je *prinudno* kretanje. Veze mogu biti oblika linije ili površine. U slučaju kretanja po površini broj stepeni slobode je 2, za kretanje po liniji 1.

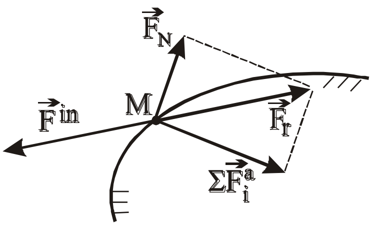


Na tačku koja se kreće po vezi, deluju aktivne sile i sile veze, pa važi:

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_R}$$

$\rightarrow\ ma_T = \sum F_{iT}^a + F_\mu$ (za glatku vezu F_μ=0); $ma_N = \sum F_{iN}^a + F_N$

3.6.1. Dalamberov princip za materijalnu tačku



Slaganjem aktivnih i reaktivnih sila dobija se rezultanta $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N$. Vektor $\vec{a}$ ima isti pravac i smer kao rezultanta $\vec{F}_r$. Tačka M se može fiktivno uravnotežiti ako se sili $\vec{F}_r$ suprotstavi sila istog pravca i intenziteta a suprotnog smera - sila inercije $\vec{F}^{in} = -\vec{F}_r$. Pošto je po II Njutnovom zakonu $\vec{F}_r = m\vec{a} \rightarrow$ <u>sila inercije</u> biće jednaka $\boxed{\vec{F}^{in} = -m\vec{a}}$.

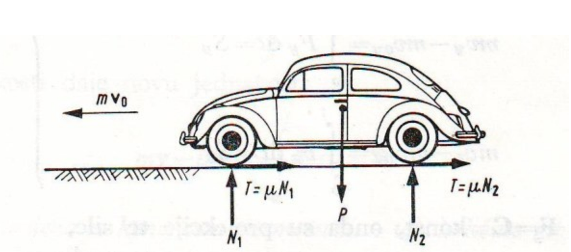
Inercijalna sila se može projektovati na tangentu i normalu: $F_T^{in} = -ma_T = -m\dfrac{dv}{dt},\ F_N^{in} = -m\dfrac{v^2}{R_k}$.

<u>Jednačina fiktivne ravnoteže</u> za tačku M: $\vec{F}_r + \vec{F}^{in} = 0,\ \boxed{\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N + \vec{F}^{in} = 0.}$

<u>Dalamberov princip za tačku</u>: V*ektorski zbir svih aktivnih, reaktivnih i inercijalnih sila, koje deluju na materijalnu tačku, jednak je nuli.* Dalamberov princip omogućuje da se pri rešavanju dinamičkih zadataka postave jednačine kretanja u obliku statičkih jednačina ravnoteže.

3.7. ZADACI IZ OPŠTIH ZAKONA DINAMIKE TAČKE

<u>ZADATAK 3.8. (**Zakon o promeni količine kretanja**):</u> Automobil je naglo zakočio, pri brzini *v_0=144 km/h*, tako da počne da se kliza po kolovozu bez obrtanja točkova. Koeficijent trenja između kolovoza i guma na točkovima je *μ=0,1* (u slučaju vlažnog kolovoza). Odrediti vreme i put kočenja.



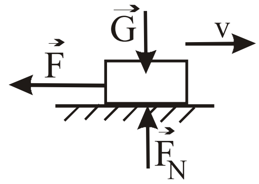
<u>Rešenje</u>: Pri zaustavljanju je *v=0* a početna brzina je $v_0 = 144\dfrac{km}{h} = 144\dfrac{1000m}{3600s} = 40\dfrac{m}{s}$. Na automobil deluju: sila težine *P=mg*, reakcije N_1 i N_2 i sila trenja $T = \mu N_1 + \mu N_2 = \mu(N_1 + N_2) = \mu P = \mu mg$. Po

zakonu o promeni količine kretanja biće: $K_x - K_{0x} = \sum I_{ix} \rightarrow mv - mv_0 = -T \cdot t \rightarrow$

$0 - mv_0 = -\mu mg \cdot t$, $mv_0 = \mu mg \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{v_0}{\mu g} = \dfrac{40}{0{,}1 \cdot 9{,}81} = 40{,}77s$. Prema II Njutnovom zakonu je:

$ma = \sum X_i = -T = -\mu mg$, pa je $a = -\dfrac{\mu mg}{m} = -\mu g = -0{,}1 \cdot 9{,}81 = -0{,}981 \dfrac{m}{s^2}$ (usporenje). Pređeni put

pri jednako usporenom kretanju: $s = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{0{,}981 \cdot 40{,}77^2}{2} = 815m.$



ZADATAK 3.9. (**Zakon o promeni količine kretanja**): Teretu mase $m=6kg$ koji leži na horizontalnoj ravni, saopšti se udarcem početna brzina $v_0=10m/s^2$. Nastalo kretanje koči se konstantnom silom $F=3N$. Odrediti posle kog vremena će se teret zaustaviti i koliki put će preći do zaustavljanja.

Rešenje: Po zakonu o promeni količine kretanja: $\vec{K} - \vec{K}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum \vec{I}_i$, sledi:

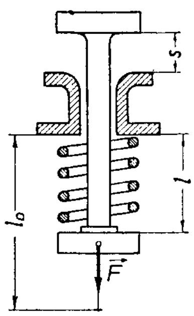
$$K_x - K_{0x} = \sum I_{ix} \rightarrow mv_1 - mv_0 = \sum I_{ix}, \quad v_1 = 0, \quad \sum I_{ix} = -F \cdot t_1 = -3t_1$$

$$0 - 6 \cdot 10 = -3t_1 \quad \rightarrow \quad 60 = 3t_1 \quad \rightarrow \quad t_1 = 20s$$

Iz zakona o promeni kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathbf{A}_i$, gde je $\mathbf{A} = -Fs$ sledi:

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -Fs \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}6 \cdot 10^2 = -3 \cdot s \quad \rightarrow \quad 300 = 3s \quad \rightarrow \quad s = 100m.$$

ZADATAK 3.10. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): Opruga ventila ima dužinu $l_0=6cm$, u nenapregnutom stanju. Kada je ventil potpuno otvoren, dužina opruge iznosi $l=4cm$, a visina podizanja ventila $s=0{,}6cm$. Krutost opruge je $c=10N/m$ a težina ventila $G=0{,}4N$. Zanemarujući dejstvo sile teže i otpora kretanju ventila odrediti brzinu u trenutku zatvaranja.

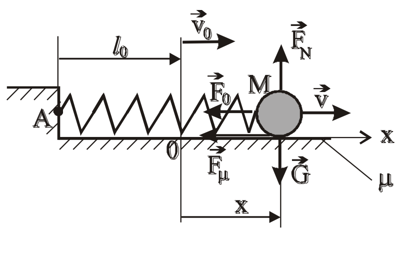


Rešenje: Zakon promene kinetičke ener.: $E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathbf{A}_i$. (a).

Početna brzina $v_0 = 0$, masa ventila je $m = G/g = 4/9{,}81 = 0{,}0408kg = 40{,}8g$.

U ovom slučaju rad vrši samo elastična sila opruge $\vec{F}$: $d\mathbf{A} = \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2)$. Početno rastojanje od ravnotežnog položaja je: $x_1 = l_0 - l = 6-4=2cm=0{,}02m$; krajnje rastojanje $x_2 = l_0 - (l+s) = 6-(4+0{,}6) = 1{,}4cm = 0{,}014m$. Zamenom ovih veličina u izraz (a) dobićemo:

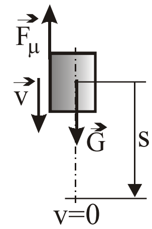
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}c\left(x_1^2 - x_2^2\right) \rightarrow mv_1^2 = c\left(x_1^2 - x_2^2\right) \rightarrow v_1^2 = \frac{c}{m}\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \frac{10}{0{,}0408}\left(0{,}02^2 - 0{,}014^2\right) = 0{,}05 \rightarrow v_1 = \sqrt{0{,}05} = 0{,}22\frac{m}{s}.$$



ZADATAK 3.11. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): Kuglica M, mase $m=2kg$, prikačena je za slobodni kraj opruge krutosti $c=10N/m$. Kuglica leži na horizontalnoj hrapavoj ravni koeficijenta trenja $\mu=0{,}25$. U ravnotežnom (nenapregnutom) položaju O kuglici je saopštena horizontalna početna brzina $v_0=1m/s$. Naći brzinu kuglice v u funkciji pomeranja x.

Rešenje: Može se primeniti zakon o promeni kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$. Rad na pomeranju x imaju elastična sila opruge $\mathbf{A} = -\frac{c}{2}x^2$ i sila trenja $F_\mu = \mu F_N = \mu mg$ po obrascu $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu x = -\mu mg \cdot x$; rad nemaju sile upravne na pravac pomeranja (G, F_N) .

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = -\frac{c}{2}x^2 - \mu mgx, \quad \frac{2v^2}{2} - \frac{2 \cdot 1^2}{2} = -\frac{10}{2}x^2 - 0{,}25 \cdot 2 \cdot 9{,}81x, \; v^2 = 1 - 5x^2 - 4{,}9x$$

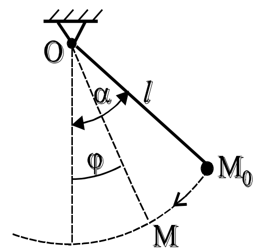


ZADATAK 3.12. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): U rudarskom oknu kreće se naniže dizalica težine $G=60kN$, brzinom $v=12m/s$. Odrediti silu trenja između dizalice i vođica, koju mora da razvije uređaj za hvatanje da bi se dizalica, posle kidanja užeta koje je pridržava, zaustavila nakon $s=10m$. Pretpostaviti da je sila trenja konstantna.

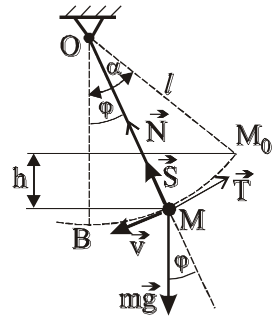
Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije dobijamo:

$$E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i;\quad 0-\frac{1}{2}mv^2=-F_{\mu}s+Gs\rightarrow F_{\mu}s=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2+Gs\rightarrow F_{\mu}=\frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{v^2}{s}+G=104kN.$$

ZADATAK 3.13. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): Kuglica M, mase $m=3kg$, vezana je za laki nerastegljivi konac dužine $l=1{,}5m$. Drugi kraj konca je vezan za nepokretnu tačku O (matematičko klatno). Klatno je otklonjeno od vertikalnog (ravnotežnog) položaja za ugao $\alpha=60^0$ i pušteno bez početne brzine. Naći brzinu kuglice u proizvoljnom položaju pod uglom φ. Uzeti da je $g\cong 10m/s^2$. Koliko iznosi brzina i sila u koncu u najnižem položaju kuglice (tačka B).



Rešenje: Najpre treba naći brzinu tačke u proizvoljnom položaju, koristeći zakon promene kinetičke energije $E_{k1}-E_{k0}=\sum \mathbf{A}_i$., pri čemu je $v_0=0$:



$$\frac{mv^2}{2}-0=mgh,\ mv^2=2mgh;\ h=l\cos\varphi-l\cos\alpha=l(\cos\varphi-\cos\alpha);$$

$$mv^2=2mgl(\cos\varphi-\cos\alpha),\Rightarrow v^2=2gl(\cos\varphi-\cos\alpha).$$

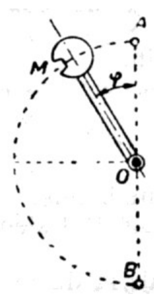
$$v^2=2\cdot 10\cdot 1{,}5(\cos\varphi-\cos 60^0)=30(\cos\varphi-0{,}866).$$

Koristeći Dalamberov princip (projekcija na pravac normale) dobija se:

$$S-mg\cos\varphi-F_N^{in}=0\rightarrow ma_N=S-mg\cos\varphi,\ \frac{mv^2}{l}=S-mg\cos\varphi.\Rightarrow S=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\varphi$$

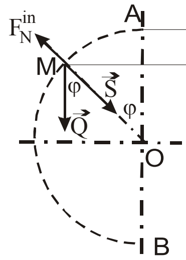
U najnižem položaju je $\varphi=0$ ($\cos\varphi=1$) pa sledi: $v^2=30(\cos 0^0-0{,}866)=30(1-0{,}866)=4{,}02.$

Sila u koncu jednaka je: $S=\dfrac{mv^2}{l}+mg\cos\varphi=\dfrac{3\cdot 4{,}02}{1{,}5}+3\cdot 10\cdot 1=38{,}04N$



ZADATAK 3.14. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): U Šarpijevom priboru za ispitivanje, čelični liv težine $Q=200N$ učvršćen je za kraj poluge $OM=981cm$, koja se može obrtati oko nepomične horizontalne ose O. Liv pada iz najvišeg položaja A beskrajno malom početnom brzinom. Odrediti najveći pritisak štapa na osovinu. Masu štapa zanemariti.

Rešenje: Ako primenimo zakon o promeni kinetičke energije za početni A ($v_0=0$) i proizvoljni položaj M pod uglom φ dobijamo:



$$E_{k1}-E_{k0}=mgh\rightarrow\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=mgh\,/\cdot\frac{2}{m}\rightarrow$$

$$v^2=2gh;\quad h=OM(1-\cos\varphi)\rightarrow v^2=2g\cdot OM(1-\cos\varphi)$$

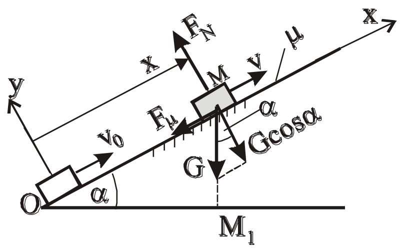
Na liv deluje sila u polugi $\vec{S}$, sila težine $\vec{Q}$ i inercijalna sila $\vec{F}^{in}=-m\vec{a}$.
Projektovanjem Dalamberove jednačine $\sum\vec{F}_i^a+\vec{F}_N+\vec{F}^{in}=0$ na pravac normale dobija se

$$S+Q\cos\varphi-F_N^{in}=0\ ,\ F_N^{in}=\frac{m}{R}v^2=\frac{Q}{g}\frac{1}{OM}2g\cdot OM(1-\cos\varphi)=2Q(1-\cos\varphi),$$

pa je sila u poluzi: $S=-Q\cos\varphi+F_N^{in}=-Q\cos\varphi+2Q(1-\cos\varphi)=Q(2-3\cos\varphi)$.

Za $\varphi=\pi\rightarrow\cos\varphi=-1\Rightarrow S_{max}=Q(2+3)=5Q=1kN$.

ZADATAK 3.15. (**Zakon o promeni kinetičke energije**):Telo M, mase $m=8kg$ i malih dimenzija, kreće se uz hrapavu strmu ravan nagiba $\alpha=45^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,25$. Telo M je krenulo iz podnožja strme ravni sa početnom brzinom $v_0=6m/s$. Naći brzinu v tela nakon pređenog puta $x=2m$. Zatim izračunati pređeni put $x_1=s$ do zaustavljanja tela.



Rešenje: Na telo deluju sila težine G, sila trenja F_μ i reakcija podloge F_N (normalna na pravac kretanja pa je njen rad jednak nuli). Sila trenja je jednaka

$F_\mu=\mu F_N=\mu G\cos\alpha=\mu mg\cos\alpha=0,25\cdot 8\cdot 9,81\cdot 0,707=13,9N$. Rad sile trenja jednak je $\mathbf{A}_\mu=-F_\mu x$.

Visinska razlika: $h=x\cdot\sin\alpha=2\cdot\sin 45^0=2\cdot 0,707=1,414m$ a rad sile težine $\mathbf{A}_G=-mgh$.

Zakon promene kinetičke energije: $E_k-E_{ko}=\mathbf{A}_G+\mathbf{A}_\mu;\Rightarrow\dfrac{mv^2}{2}-\dfrac{mv_o^2}{2}=-mgh-F_\mu x,$

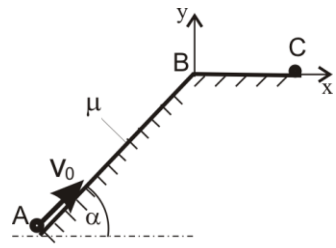
$$\frac{8v^2}{2}-\frac{8\cdot 6^2}{2}=-8\cdot 9,81\cdot 1,414-13,9\cdot 2\Rightarrow 4v^2=144-110,97-27,8=5,23\Rightarrow v^2=1,3\Rightarrow v=1,14\frac{m}{s}$$

Na kraju kretanja tela brzina je jednaka nuli tj. $v=0$: $h_1=s\cdot\sin\alpha=s\cdot\sin 45^0=0,707s$

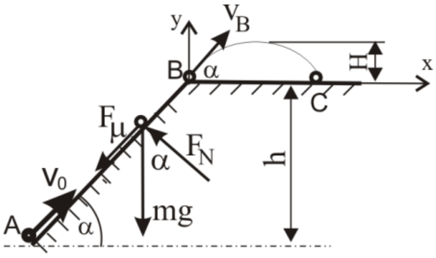
$$E_k-E_{ko}=\mathbf{A}_G+\mathbf{A}_\mu\Rightarrow 0-\frac{mv_o^2}{2}=-mgh_1-F_\mu s\Rightarrow 0-\frac{8\cdot 6^2}{2}=-8\cdot 9,81\cdot 0,707s-13,9s$$

$$-144=-55,48s-13,9s\Rightarrow 144=69,38s\Rightarrow s=2,07m$$

ZADATAK 3.16. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac**): Telo M, mase $m=4kg$, kreće se uz hrapavu strmu ravan visine $h=3,464m$, nagiba $\alpha=60^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,2$. Telo M je krenulo iz podnožja strme ravni sa početnom brzinom $v_0=15m/s$. Naći brzinu v_B tela na vrhu strme ravni. Iz tačke B nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku C. Izračunati domet i visinu do koje će se tačka popeti u toku svog slobodnog kretanja. Uzeti da je $g\cong 10m/s^2$. Koliko bi iznosila brzina i visina penjanja ako je strma ravan glatka?



Rešenje: Sila trenja: $F_\mu=\mu F_N=\mu mg\cos\alpha=0,2\cdot 4\cdot 10\cdot 0,5=4N$. Data je visina $h=3,464m\Rightarrow$ dužina strme ravni $\dfrac{h}{s}=\sin\alpha\rightarrow\quad s=\dfrac{h}{\sin\alpha}=\dfrac{3,464}{\sin 60^0}=\dfrac{3,464}{0,866}=4m$.



Rad sile trenja jednak je $\mathbf{A}_\mu=-F_\mu s$, rad sile težine $\mathbf{A}_G=-mgh$.

Primenjujemo zakon promene kinetičke energije:

$$E_k-E_{ko}=\mathbf{A}_G+\mathbf{A}_\mu;\Rightarrow\frac{mv_B^2}{2}-\frac{mv_o^2}{2}=-mgh-F_\mu s,$$

$$\frac{4v_B^2}{2}-\frac{4\cdot 15^2}{2}=-4\cdot 10\cdot 3,464-4\cdot 4\Rightarrow$$

$$2v_B^2=450-138,56-16=295,44\Rightarrow\quad v_B^2=147,72\Rightarrow v_B=12,15\frac{m}{s}$$

Domet kosog hitca jednak je: $d=BC=\dfrac{v_B^2\sin(2\cdot 60^0)}{g}=\dfrac{147,72\cdot 0,866}{9,81}=13,04m.$

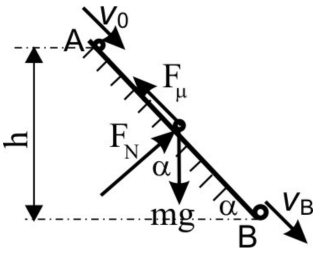
Visina penjanja kosog hica: $H=\frac{v_B^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{147{,}72\cdot 0{,}866^2}{2\cdot 10}=5{,}54m.$

U slučaju glatke strme ravni biće $F_\mu=0$ pa sledi:

$$\frac{4v_B^2}{2}-\frac{4\cdot 15^2}{2}=-4\cdot 10\cdot 3{,}464 \Rightarrow 2v_B^2=450-138{,}56=311{,}44\Rightarrow v_B^2=155{,}72; \qquad H=5{,}84m.$$

ZADATAK 3.17. (**Zakon o promeni kinetičke energije**): Telo mase $m=8\ kg$ kreće se niz hrapavu strmu ravan nagiba $\alpha=45°$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=\frac{1}{6}$. Naći brzinu tela nakon pređenog puta $s=AB=4{,}24$ m ako je početna brzina $v_0^2=20\frac{m^2}{s^2}$ (uzeti da je $g\cong 10m/s^2$).

Rešenje:



Na telo deluju sila težine G, sila trenja F_μ i reakcija podloge F_N (normalna na pravac kretanja). Sila trenja je jednaka: $\boxed{F_\mu=\mu F_N}$, dok intenzitet normalne komponente sile trenja na strmoj ravni iznosi: $F_N=mgcos\alpha=8\cdot 10\cdot cos45°=\boxed{56{,}56\ N}$.

Prema slici, u zavisnosti od pređenog puta s i nagiba strme ravni α, visinska razlika h iznosi:

$$\boxed{s=AB=\frac{h}{\sin\alpha}\rightarrow h=s\cdot\sin\alpha=4{,}24\cdot 0{,}707=3m}$$

Primenom zakona promene kinetičke energije između položaja A i B odredićemo brzinu tela u tački B,v_B: $\boxed{E_{K1}-E_{K0}=\sum \mathbb{A}_i}$ tj. $\boxed{E_{KB}-E_{KA}=\mathbb{A}_{mg}+\mathbb{A}_{F_\mu}\ ...(1)}$

$$E_{KB}=\frac{mv_B^2}{2}=\frac{8\cdot v_B^2}{2}=4\cdot v_B^2\ ...-\text{kinetička energija tela u položaju } B\ \left(kg\frac{m^2}{s^2}=J\right)$$

$$E_{KA}=\frac{mv_0^2}{2}=\frac{8\cdot 20}{2}=80\ J-\text{kinetička energija tela u položaju } A$$

Rad sile zemljine teže je pozitivan kada se telo kreće sa višeg prema nižem nivou, na visinskoj razlici h, tj. kada se telo kreće niz strmu ravan, u suprotnom je negativan:

$$\mathbb{A}_{mg}=mgh=8\cdot 10\cdot 3=240\ J$$

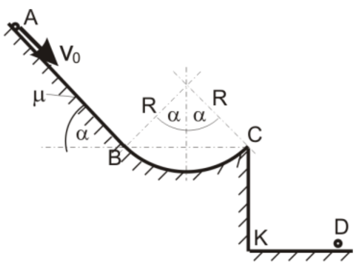
Rad sile trenja je uvek negativan: $\mathbb{A}_{F_\mu}=-\mu F_N s=-\frac{1}{6}\cdot 56{,}56\cdot 4{,}24=-40\ J$

Iz zakona promene kinetičke energije (jednačina (1), određujemo brzinu tela u tački B:

$$4v_B^2-80=240-40$$

$$4v_B^2=200+80\rightarrow v_B^2=70\rightarrow v_B=\sqrt{70}=\boxed{8{,}37\ \frac{m}{s}}$$

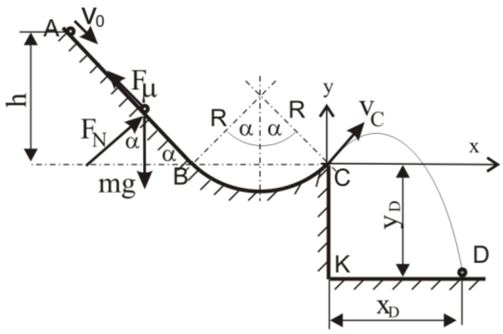
ZADATAK 3.18. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac**): Telo M, mase $m=10kg$, kreće se niz hrapavu strmu ravan dužine $AB=s=8m$, nagiba $\alpha=30^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0{,}25$. Telo M je krenulo iz tačke A početnom brzinom $v_0=5m/s$. Dalje se kreće po glatkoj polukružnoj stazi ($R=2m$) do tačke C, pa nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku D ($g\cong 10m/s^2$, visina $CK=3m$). Izračunati rastojanje KD.



Rešenje:

Sila trenja je jednaka: $F_\mu=\mu F_N=\mu mg\cos\alpha=0{,}25\cdot 10\cdot 10\cdot 0{,}866=21{,}65N.$

Visina strme ravni: $\frac{h}{s} = \sin\alpha \to h = s\cdot\sin 30^0 = 8\cdot 0{,}5 = 4m$



Zakon promene kinetičke energije možemo primeniti između položaja C i A, jer su brzine v_B i v_C međusobno jednake pošto na putu između njih nema trenja (pa je $\mathbf{A}_\mu = 0$) a nema ni visinske razlike (pa je $\mathbf{A}_G = 0$):

Rad sile trenja između položaja A i C jednak je $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu s$, rad sile težine $\mathbf{A}_G = +mgh$.

$$E_{kC} - E_{ko} = \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_\mu; \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = +mgh - F_\mu s,$$

$$\frac{10v_C^2}{2} - \frac{10\cdot 5^2}{2} = +10\cdot 10\cdot 4 - 21{,}56\cdot 8 \Rightarrow\ 5v_C^2 = 125 + 400 - 173{,}2 = 351{,}8 \Rightarrow\quad v_C^2 = 70{,}36 \Rightarrow v_C = 8{,}4\frac{m}{s}$$

Kosi hitac: početna brzina je $v_C^2 = 70{,}36$ a početni ugao je $30^0 \to tg\alpha = 0{,}577;\quad \cos\alpha = 0{,}866$ pa je jednačina parabole kosog hitca: $y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_C^2\cos^2\alpha} = 0{,}577x - \frac{10x^2}{2\cdot 70{,}36\cdot 0{,}75} = 0{,}577x - 0{,}095x^2$.

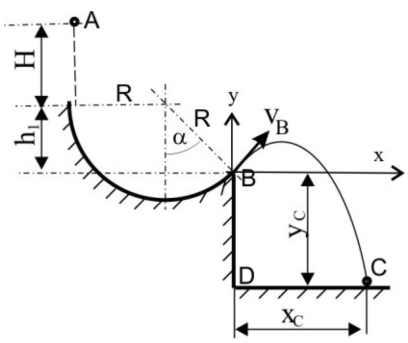
Koordinate tačke D $y_D = -3m,\ x_D = ?$ moraju zadovoljavati jednačinu putanje pa sledi:

$$y_D = 0{,}577x_D - 0{,}095x_D^2 \quad\to\quad -3 = 0{,}577x_D - 0{,}095x_D^2 \to\quad 0{,}095x_D^2 - 0{,}577x_D - 3 = 0$$

Rešenja ove jednačine su: $x_{1,2} = \frac{0{,}577 \pm \sqrt{0{,}577^2 - 4\cdot 0{,}095\cdot(-3)}}{2\cdot 0{,}095} \to x_1 = 9{,}4m\ \ i\ \ x_2 = -3{,}35m$

Prvo rešenje $x_1 = 9{,}4m$ je realno rešenje jednačine.

ZADATAK 3.19. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac**): Materijalna tačka čija masa iznosi $m = 10kg$ započinje kretanje iz tačke A na visini $H = 3\ m$, bez početne brzine. Tačka se dalje kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 2\ m$, gde je ugao $\alpha = 60°$. Po napuštanju kružne staze tačka nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha se zanemaruje) i pada na horizontalnu podlogu u tački C (visina $DB = 3{,}75\ m$). Odrediti brzinu tačke u položaju B i rastojanje BC. Uzeti da je g ≅ 10 m/s^2.



Rešenje: Da bi smo odredili brzinu materijalne tačke u položaju B, primenićemo zakon promene kinetičke energije između položaja A i B. Kako materijalna tačka započinje kretanje iz položaju A bez početne brzine ($v_0 = 0$), kinetička energija u položaju A jednaka je nuli: $E_{KA} = 0$. Takođe podloga po kojoj se kreće materijalna tačka je glatka, tj. ne javlja se sila trenja, pa je i rad sile trenja ($\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$) jednak nuli, tako da se javlja samo rad sile zemljine teže $\mathbb{A}_{mg} = mg(H + h_1)$, koji je u ovom slučaju pozitivan.

Zakon promene kinetičke energije glasi:

$$E_{KB} - E_{KA} = \sum \mathbb{A}_i \quad \text{tj.} \quad E_{KB} - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg} + \mathbb{A}_{F_\mu}\ \dots(1)$$

Sa slike visinska razlika ($H+h_1$) između položaja A i B iznosi:

$h_1 = R\cos\alpha = 2\cdot \cos 60° = 2\cdot 0{,}5 = 1\ m$ pa je $H + h_1 = 3 + 1 = 4\ m$

$E_{KB} = \frac{mv_B^2}{2} = 5v_B^2$ – kinetička energija materijalne tačke u položaju B $\mathbb{A}_{mg} = mg(H + h_1) = 10\cdot 10\cdot 4 = 400\ J$ $E_{KA} = 0;\ \mathbb{A}_{F_\mu} = 0;$	$E_{KB} - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg}$ $\to 5v_B^2 - 0 = 400$ $v_B^2 = 80 \to v_B = 8{,}94\ \frac{m}{s}$ Brzina materijalne tačke u položaju B

Kosi hitac: Početna brzina $v_B^2 = 80\frac{m^2}{s^2}$, a početni ugao je $60° \rightarrow tg60° = \sqrt{3} = 1{,}73$

$cos60° = 0{,}5 \rightarrow cos^2 60° = 0{,}25$, pa je jednačina parabole kosog hitca: $\boxed{y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_B^2 cos^2\alpha}}$

$$y = 1{,}73x - \frac{10x^2}{2 \cdot 80 \cdot 0{,}25} \rightarrow y = 1{,}73x - 0{,}25x^2$$

Koordinate tačke C, (sa slike y_C = -3,75 m; x_C = ?) moraju zadovoljavati jednačinu putanje, pa sledi:

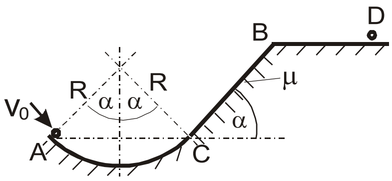
$$y_C = 1{,}73x - 0{,}25x^2$$

$$-3{,}75 = 1{,}73x - 0{,}25x^2 \rightarrow 0{,}25x^2 - 1{,}73x - 3{,}75 = 0$$

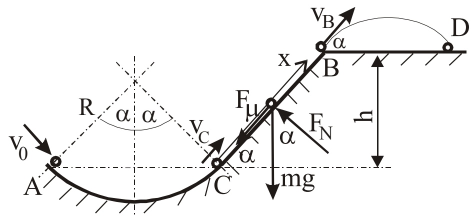
$$x_{1,2} = \frac{1{,}73 \pm \sqrt{1{,}73^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-3{,}75)}}{2 \cdot 0{,}25} = \frac{1{,}73 \pm 2{,}6}{0{,}5}$$

$x_1 = 8{,}66\ m;\ x_2 = -1{,}74\ m \Rightarrow \boxed{DC = 8{,}66\ m}$ – prvo rešenje je realno rešenje jednačine.

ZADATAK 3.20. (**Zakon o promeni kinetičke energije, kosi hitac, Dalamberov princip**): Materijalna tačka M, mase $m=2kg$, počinje kretanje iz tačke A, početnom brzinom $v_0 = 8m/s$, po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R=1m$ do tačke C, a zatim uz hrapavu strmu ravan CB (visine $h=2m$, nagiba $\alpha=60^0$ i koeficijenta trenja klizanja $\mu=0{,}35$) do tačke B. Iz tačke B nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha zanemariti) i pada u tačku D. Odrediti rastojanje BD i reakciju F_{NC} u tački C.



Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i C, pošto nema visinske razlike $(\mathbf{A}_{mg} = 0)$ a kružna staza je glatka $(\mathbf{A}_{F_\mu} = 0)$, brzina u položaju C će imati istu vrednost kao početna brzina, tj. $v_C = v_0 = 8m/s$.



Da bi smo odredili brzinu v_B primenićemo zakon promene kinetičke energije između položaja C i B. Prvo određujemo silu trenja i dužinu strme ravni $CB=s$:

$$F_N = mg\cos\alpha, \quad F_\mu = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha = 0{,}35 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 3{,}43N,$$

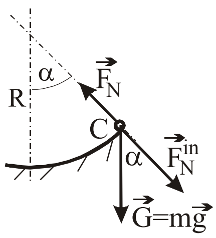
$$\frac{h}{s} = sin\,\alpha \rightarrow s = CB = \frac{h}{sin\,\alpha} = \frac{2}{sin\,60^0} = 2{,}3m.$$

Rad sile trenja između položaja C i B jednak je $\mathbf{A}_\mu = -F_\mu s$, rad sile težine $\mathbf{A}_G = -mgh$.

$$E_{kB} - E_{kC} = \mathbf{A}_{mg} + \mathbf{A}_{F_\mu} \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -mgh - F_\mu s\,.$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 = -2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 - 3{,}43 \cdot 2{,}3 \rightarrow v_B^2 = 64 - 39{,}24 - 7{,}9 = 16{,}86 \rightarrow \quad v_B = \sqrt{16{,}86} = 4{,}1\frac{m}{s}.$$

Od tačke B sledi kosi hitac, sa početnom brzinom $v_B = 4{,}1m/s$, pod uglom 60^0.

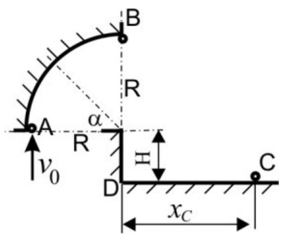


Domet kosog hitca jednak je: $d = BD = \frac{v_B^2 sin(2 \cdot 60^0)}{g} = \frac{16{,}86 \cdot 0{,}866}{9{,}81} = 1{,}49m.$

Normalnu reakciju u tački C, na kraju polukružne staze određujemo primenom Dalamberovog principa: $F_N^{in} = \frac{m}{R}v_C^2 = \frac{2}{1}8^2 = 128N$, $F_N - F_N^{in} - mg\cos\alpha = 0$,

$$F_N = F_N^{in} + mg\cos\alpha = 128 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 137{,}8N.$$

ZADATAK 3.21. (**Zakon o promeni kinetičke energ., horizontalni hitac, Dalamberov princip**): Materijalna tačka mase $m = 6\ kg$ započinje kretanje iz tačke A, početnom brzinom v_0=14,49 m/s. Tačka se kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 6\ m$. Po napuštanju kružne staze, u položaju B, tačka nastavlja slobodno kretanje (otpor vazduha se zanemaruje) i pada na horizontalnu podlogu u tački C (visina $H = 2\ m$). Odrediti brzinu tačke u položaju B i rastojanje x_C. Odrediti normalnu reakciju podloge u položaju određenim uglom $\alpha = 30°$. Uzeti da je g≅ 10 m/s^2.



Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i B, pošto je podloga po kojoj se kreće materijalna tačka glatka, rad sile trenja je jednak nuli, $\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$, izračunaćemo brzinu materijalne tačke u položaju B:

$E_{KB} = \dfrac{mv_B^2}{2} = 3v_B^2$ $E_{KA} = \dfrac{mv_0^2}{2} = 630\ J$ $\mathbb{A}_{mg} = -mgR = -360\ J$ $\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$	$E_{KB} - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg}$ $3v_B^2 - 630 = -360 \rightarrow 3v_B^2 = 270$ $\rightarrow v_B^2 = 90 \Longrightarrow \boxed{v_B = 9{,}5\ \dfrac{m}{s}}$ Brzina tačke u položaj B

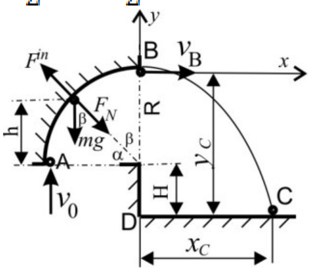
Horizontalni hitac: Početna brzina je $v_B^2 = 90\frac{m^2}{s^2}$, a ugao je 0°, tako da jednačina putanje horizontalnog hica glasi: $\boxed{y = -\frac{gx^2}{2v_B^2}}$ $\rightarrow$ $y = -\dfrac{10 \cdot x^2}{2 \cdot 90} \rightarrow y = -\dfrac{x^2}{18}$

Koordinate tačke C moraju zadovoljavati jednačinu putanje:

$$y_C = -(R + H) = -8\ m \Longrightarrow -8 = -\frac{x^2}{18} \Longrightarrow x_C^2 = 18 \cdot 8 = 144 \Longrightarrow x_C = 12\ m$$

Da bi smo odredili normalnu reakciju podloge u položaju koji je određen uglom α = 30°, prvo primenjujemo zakon promene kinetičke energije između početnog i položaja određenog uglom α, odakle se dobija brzina v: $E_K - E_{KA} = \mathbb{A}_{mg}$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh = -mgRsin\alpha \Longrightarrow 3v^2 - 630 = -6 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 0{,}5 \Longrightarrow v^2 = 150\frac{m^2}{s^2}$$



Primenom Dalamberovog principa (projekcija na pravac normale), određujemo normalnu reakciju podloge:

$$F_N^{in} = m\frac{v^2}{R} = 6 \cdot \frac{150}{6} = 150\ N, \text{ugao}\ \beta = 60°$$

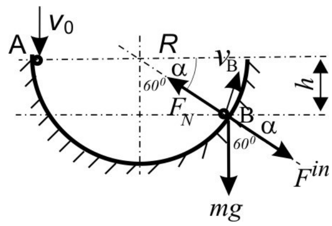
$$F_N + mgcos60° - F_N^{in} = 0 \Longrightarrow F_N = F_N^{in} - mgcos60° = 150 - 6 \cdot 10 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{F_N = 120\ N}$$

ZADATAK 3.22. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): Materijalna tačka mase $m = 12\ kg$ započinje kretanje iz tačke A početnom brzinom $v_0 = 2\ m/s$. Tačka se kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika $R = 8\ m$ do položaja B određenim uglom $\alpha = 30°$. Odrediti brzinu tačke u položaju B. Odrediti normalnu reakciju podloge u tom položaju.

Rešenje: Da bi smo odredili brzinu materijalne tačke u položaju B, primenićemo zakon promene kinetičke energije između položaja A i B: $E_{KB} - E_{KA} = \sum \mathbb{A}_i$

Sa slike sledi da je visinska razlika između položaja A i B:



$$\frac{h}{R} = cos60° \rightarrow h = Rcos60°$$

Rad sile zemljine teže je u ovom slučaju pozitivan i iznosi:

$$\mathbb{A}_{mg} = mgh = mg(Rcos60°) = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 480\ J$$

dok je rad sile trenja jednak nuli (jer je površina glatka): $\mathbb{A}_{F_\mu} = 0$.

Kinetička energija materijalne tačke u početnom položaju A: $E_{KA} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{12 \cdot 2^2}{2} = 24\,J$

Kinetička energija materijalne tačke u položaju B: $E_{KB} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{12 v_B^2}{2} = 6v_B^2$

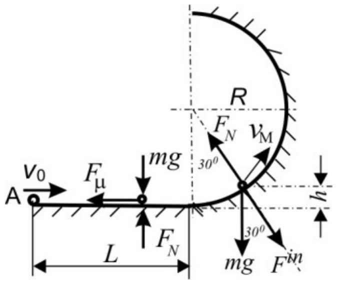
$$6v_B^2 - 24 = 480 \Longrightarrow 6v_B^2 = 504 \Longrightarrow v_B^2 = 84\,\frac{m^2}{s^2} \Longrightarrow v_B = 9\,\frac{m}{s}$$

Primenom Dalamberovog principa (projekcija na pravac normale), određujemo normalnu reakciju:

$$F_N^{in} = m\frac{v_B^2}{R} = 12 \cdot \frac{84}{8} = 126\,N \quad \rightarrow \quad F_N - F_N^{in} - mg\cos 60° = 0$$

$$F_N - 126 - 12 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{F_N = 186\,N}$$

ZADATAK 3.23. (**Zakon o promeni kinetičke energije, Dalamberov princip**): Telo mase *m=2kg*, je krenulo iz tačke A početnom brzinom $v_0=5m/s$ i kreće se po hrapavoj horizontalnoj ravni dužine *AB=L=1m* i koeficijenta trenja klizanja $\mu=1/4=0{,}25$. Dalje se kreće po glatkoj kružnoj stazi poluprečnika *R = 1 m* do položaja M određenim uglom $\alpha = 30°$. Odrediti brzinu u tački M, kao i normalnu komponentu podloge ($g \cong 10m/s^2$).



Rešenje: Koristeći zakon promene kinetičke energije između položaja A i M, izračunaćemo brzinu materijalne tačke u položaju M:

$$E_{KM} - E_{KA} = \sum \mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{mg} + \mathbb{A}_{F_\mu} \ldots (1)$$

Rad sile zemljine teže je u ovom slučaju negativan, jer se telo kreće sa nižeg prema višem položaju, na visinskoj razlici h: $\mathbb{A}_{mg} = -mgh$

Sa slike je: $\frac{OE}{OM} = \cos\varphi \Longrightarrow OE = R\cos\varphi$

$$h = OB - OE = R - R\cos\varphi = R(1-\cos\varphi) = 1(1-\cos 30°) \Longrightarrow h = 0{,}134\,m$$

$$\mathbb{A}_{mg} = -mgR(1-\cos\varphi) = -2 \cdot 10 \cdot 0{,}134 = -2{,}68\,J$$

Rad sile trenja je uvek negativan (jedino je jednak nuli kada je podloga glatka), i iznosi, ako je normalna komponenta sile trenja na horizontalnoj podlozi: $F_N = mg \Longrightarrow \mathbb{A}_{F_\mu} = -\mu F_N L$

$$\mathbb{A}_{F_\mu} = -\mu mgL = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1 = -5\,J$$

Kinetička energija u položaju M: $E_{KM} = \frac{mv^2}{2}$, u položaju A: $E_{KA} = \frac{mv_0^2}{2}$

Iz jednačine (1), zakona o promeni kinetičke energije, sledi:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgR(1-\cos\varphi) - \mu mgL \Big/ \cdot \frac{m}{2} \quad \rightarrow \quad v^2 - v_0^2 = -2gR(1-\cos\varphi) - 2\mu gL$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1-\cos\varphi) - 2\mu gL = v_0^2 - 2gR - 2gR\cos\varphi - 2\mu gL$$

$$v^2 = 25 - 2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \cos\varphi - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad v^2 = 25 - 20 + 20\cos\varphi - 5$$

$$v^2 = 20\cos\varphi = 20 \cdot \cos 30° = 17{,}32\,\frac{m^2}{s^2} \Longrightarrow v = 4{,}2\,\frac{m}{s}$$

Primenom Dalamberovog principa, određujemo normalnu reakciju podloge, tj. najveći pritisak tela na podlogu. Projektovanjem Dalamberove jednačine $\sum \vec{F_i^a} + \vec{F_N} + \vec{F^{in}} = 0$ na pravac normale N, dobija se:

$$\boxed{\vec{G} + \vec{F_R} + \vec{F^{in}} = 0} \rightarrow F_N - F^{in} - mg\cos\varphi = 0$$

$$|F^{in}| = ma = ma_N = m\frac{v^2}{R} = 2 \cdot \frac{17{,}32}{1} = 34{,}64\,N \quad \rightarrow \quad F_N - m\frac{v^2}{R} - mg\cos\varphi = 0$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\varphi = 2 \cdot \frac{17{,}32}{1} + 2 \cdot 10 \cdot \cos 30° = 34{,}64 + 17{,}32 \quad \rightarrow \quad F_N = 52\,N$$