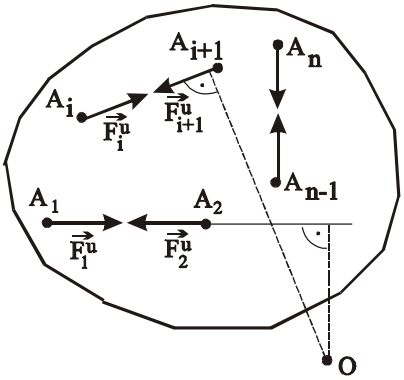
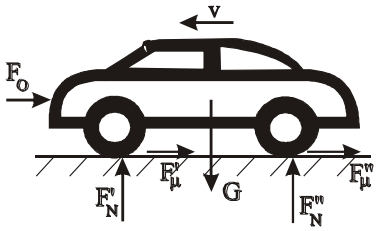
4. DINAMIKA SISTEMA. DINAMIKA TELA



Mehanički sistem materijalnih tačaka (ili tela) je skup tačaka (ili tela) između kojih vladaju mehaničke sile (tj. koje se podvrgavaju Njutnovim zakonima), tako da položaj i kretanje svake tačke zavisi od položaja i kretanja ostalih tačaka sistema. Npr. čvrsto telo, Sunčev sistem, automobil, itd. Sile koje deluju na tačke (ili tela) sistema mogu se podeliti na spoljašnje i unutrašnje. Spoljašnje sile deluju na sistem od strane tačaka koje ne pripadaju sistemu - $\vec{F}_i^s$) a unutrašnje sile deluju od drugih tačaka sistema - $\vec{F}_i^u$ i uvek se javljaju u parovima.

Na primeru automobila na slici:



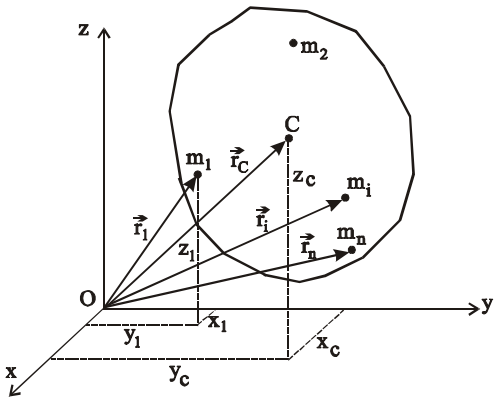
Sile $\vec{F}'_N, \vec{F}''_N, \vec{F}'_\mu, \vec{F}''_\mu$ su spoljašnje sile, jer su posledice dejstva podloge koja nije obuhvaćena posmatranim sistemom. Unutrašnje sile sistema (automobila) su sila pritiska gasova na klip motora, sile pritiska klipova na radilicu, sile trenja na osovinama točkova itd.

Svojstva unutrašnjih sila:

1) Geometrijski zbir svih unutrašnjih sila jednak je nuli $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u = 0;$

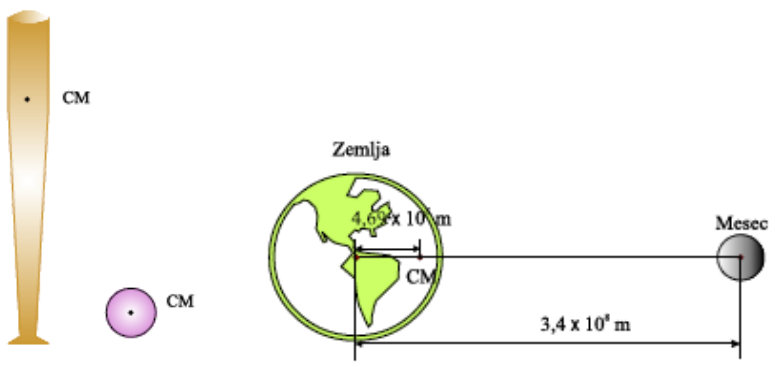
2) Geometrijski zbir momenata ovih sila za tačku (osu) jednak je nuli, $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_x^{\vec{F}_i^u} = 0.$

4.1. MASA SISTEMA I SREDIŠTE (CENTAR) MASA



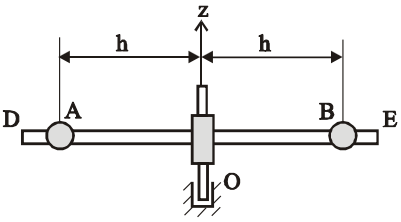
Masa sistema $\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i}$ jednaka je aritmetičkom zbiru masa svih tačaka (ili tela) sistema. Središte masa ili centar inercije sistema je tačka čiji je vektor položaja: $\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$. Projektovanjem na ose Dekartovog koordinatnog sistema dobijamo tri skalarne jednačine:

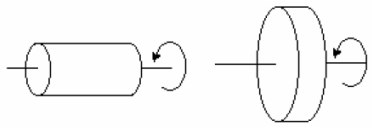
$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i.$$



Centar mase krutog tela, u homogenom polju Zemljine teže poklapa se sa težištem. Položaj centra mase krutog tela se ne menja u odnosu na tačke tela; ako se tačke sistema pomeraju jedna u odnosu na drugu, položaj centra masa se menja u toku vremena. Na slici su prikazani centri masa nekih tela i sistema.

4.2. MOMENTI INERCIJE TELA U ODNOSU NA OSU ROTACIJE

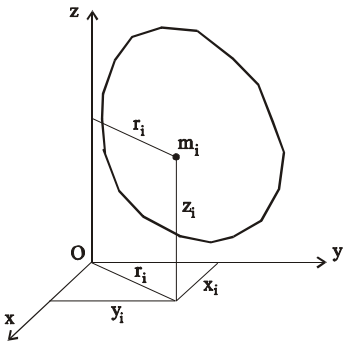




Položaj centra masa ne karakteriše u potpunosti raspored masa sistema. Npr. pri promeni rastojanja *h* od ose *Oz* (na slici), položaj centra masa će ostati nepromenjen ali će raspored masa biti drugačiji, što će uticati na brže ili sporije obrtanje oko ose *Oz*. Dakle, kod obrtnog kretanja tela za opisivanje njegove inertnosti treba znati ne samo masu tela već i kako je masa raspoređena.

Moment inercije tela (sistema), za neku osu *Oz*, je skalarna veličina koja predstavlja zbir proizvoda masa svih tačaka tela i kvadrata njihovih rastojanja od te ose:

$\boxed{J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,}$ za kontinualnu raspodelu: $J_z = \int_V r^2 dm$



Pri obrtnom kretanju J_z ima ekvivalentnu ulogu kao masa pri translaciji, tj. J_z je mera inertnosti tela pri rotaciji (ako su mase bliže osi, J_z je manji pa rotacija duže traje i obrnuto).

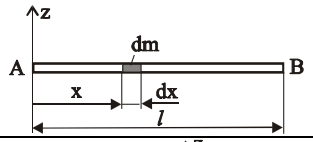
Sa slike je $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, $\Rightarrow J_z = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$.

Radijus (poluprečnik) inercije tela mase M, $\boxed{i_z^2 = \frac{J_z}{M}}$, jednak je rastojanju od ose *Oz* tačke tela, u koju treba smestiti ukupnu masu tela, da bi moment inercije te tačke bio jednak momentu inercije čitavog tela $\boxed{J_z = i_z^2 M}$. Koristi se kod tela složenog oblika.

Momenti inercije pojedinih homogenih tela:

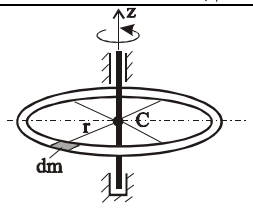
Tanki pravolinijski štap

$\boxed{J_z = \frac{Ml^2}{3}.}$



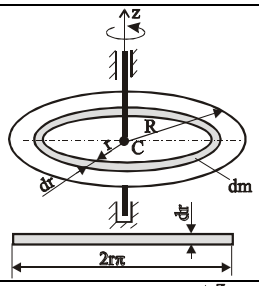
Tanki ravni kružni prsten

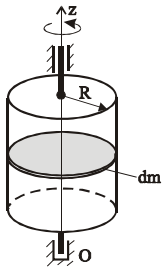
$\boxed{J_z = Mr^2}$



Kružna ploča (disk, kotur)
Valjak

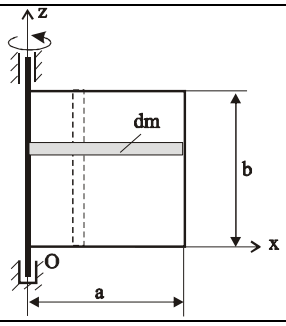
$\boxed{J_z = \frac{MR^2}{2}.}$



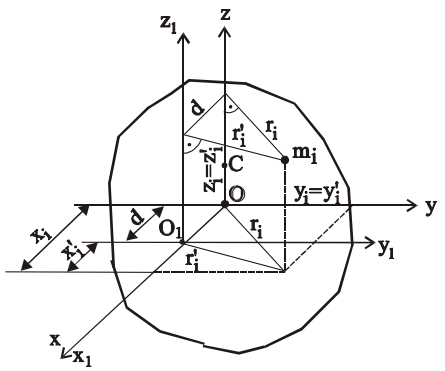


Pravougaona ploča:

$\boxed{J_z = \frac{Ma^2}{3}}$ $\boxed{J_x = \frac{Mb^2}{3}}$



MOMENTI INERCIJE ZA PARALELNE OSE. HAJGENS-ŠTAJNEROVA TEOREMA



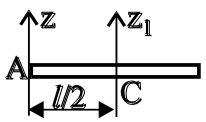
Napred navedeni obrasci za kružni prsten, kružnu ploču i valjak koriste se samo ako osa rotacije prolazi kroz centar mase tela koje rotira.
Za telo na slici centar masa tela se nalazi na *Oz* osi ($x_c=0$), gde su ose postavljene tako da je $O_1y_1 \,||\, Oy$, $O_1z_1 \,||\, Oz$.
Poznat je moment inercije J_z za osu *Oz*, treba naći J_{z1}=?

$$J_z = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \quad J_{z1} = \sum m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2\right), \quad x_i = x_i' + d, y_i = y_i', z_i = z_i',$$

$$J_{z1} = \sum m_i\left(x_i^2 - 2x_i d + d^2 + y_i^2\right) = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2d\sum m_i x_i + d^2\sum m_i.$$

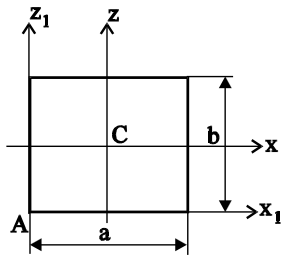
Moment inercije za osu O_1z_1: $\boxed{J_{z1} = J_z + Md^2.}$

Hajgens-Štajnerova teorema: *Moment inercije tela za datu osu jednak je zbiru momenata inercije za paralelnu težišnu osu i proizvoda mase tela i kvadrata rastojanja između paralelnih osa.* Član $\boxed{Md^2}$ je *položajni moment inercije.* Moment inercije za težišnu osu je manji od momenta inercije za bilo koju drugu paralelnu osu: $\boxed{J_z = J_{z1} - Md^2.}$



Primeri primene Hajgens-Štajnerove teoreme:
a) Odrediti moment inercije tankog homogenog pravog štapa AB, dužine l, za njegovu težišnu osu.

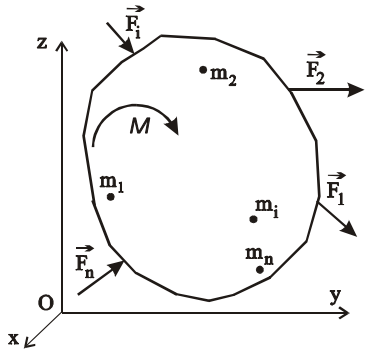
Moment inercije za kraj štapa: $J_z = \frac{Ml^2}{3}$. *Rastojanje AC=l/2, pa primenom ove teoreme dobijamo:* $J_{z1} = J_z - d^2 M = \frac{Ml^2}{3} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 M = \frac{Ml^2}{12}$.



b) Odrediti momente inercije pravougaone ploče za ose kroz težište ploče.
Za ose Ax_1 i Az_1: $J_{z1} = \frac{Ma^2}{3}$, $J_{x1} = \frac{Mb^2}{3}$. *Rastojanja:* $d_1=a/2$, $d_2=b/2$. *Primenjujući teoremu dobićemo:*

$$J_z = J_{z1} - d_1^2 M = \frac{Ma^2}{12}; \quad J_x = J_{x1} - d_2^2 M = \frac{Mb^2}{12}.$$

4.3. ZAKON O KRETANJU SREDIŠTA MASA SISTEMA



Na svaku tačku sistema deluju spoljašnje i unutrašnje sile. Primenom II Njutnovog zakona na sve tačke, dobija se *n* jednačina čijim sabiranjem dobijamo izraz: $\Sigma m_i \vec{a}_i = \Sigma \vec{F}_i^s + \Sigma \vec{F}_i^u$. Dalje je:

$$\Sigma m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}; \Rightarrow \; M\vec{a}_c = \Sigma m_i \vec{a}_i, \; \Sigma \vec{F}_i^u = 0,$$

Dobija se jednačina kretanja središta masa: $\boxed{M\vec{a}_c = \Sigma \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s.}$

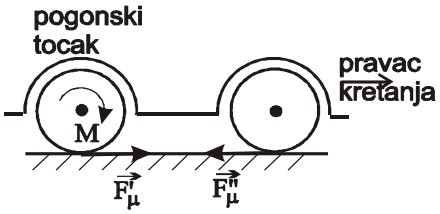
Zakon o kretanju središta masa sistema: *proizvod mase sistema i ubrzanja njegovog središta masa jednak je geometrijskom zbiru svih spoljašnjih sila.*

Projektovanjem vektorske jednačine dobijaju se skalarne jednačine: $M\ddot{x}_C = \sum X_i^s$, $M\ddot{y}_C = \sum Y_i^s, \ldots$

Zakon o održanju kretanja središta masa:

$\vec{F}_R^s = \sum \vec{F}_i^s = 0 \Rightarrow \vec{a}_C = 0, \; \vec{v}_C = const.$, tj telo miruje ili se kreće jednoliko;

ili projektovanjem na osu $X_R^s = \sum X_i^s = 0. \Rightarrow M\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = v_{Cx} = const.$



Ako posmatramo kretanje automobila po horizontalnoj površini, sila pritiska gasova u motoru je unutrašnja sila koja, kao takva, ne može izazvati pomeranje središta masa. Kretanje se ostvaruje pomoću spoljašnjih sila trenja klizanja koje se javljaju između točkova i podloge. Motor predaje obrtni moment *M* pogonskim točkovima i pri tome tačka dodira točka sa podlogom teži klizanju unazad. Tada na pogonski točak deluje sila trenja usmerena u pravcu i smeru kretanja - to je spoljašnja sila koja izaziva pomeranje središta automobila. Kada te sile nema, ili kada je ona nedovoljna (npr. na poledici), ni pri velikom obrtnom momentu, proizvedenom unutrašnjim silama, automobil neće početi kretanje već će se pogonski točkovi obrtati u mestu.

4.4. ZAKON O PROMENI KOLIČINE KRETANJA SISTEMA

Količina kretanja sistema jednaka je geometrijskom zbiru količina kretanja svih tačaka sistema:

$$\vec{K} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i.$$

Polazeći od formule za središte sistema sledi: $\sum m_i\vec{r}_i = M\vec{r}_C \Rightarrow \vec{K} = \sum m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_C$.

Promena količine kretanja biće: $\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i\vec{a}_i = \vec{F}_R^s \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{I}_i^s}$

Zakon ima sličnu formu kao i u dinamici tačke, s tim što se uzimaju samo impulsi spoljašnjih sila.

Zakon promene količine kretanja sistema: *promena količine kretanja sistema za neki vremenski interval, jednaka je vektorskom zbiru impulsa svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, a za isti interval.* Ovaj zakon ima primenu u mehanici fluida.

Zakon o očuvanju količine kretanja sistema: $\sum \vec{F}_i^s = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}}{dt} = 0$, tj. $\vec{K} = const.$

4.5. ZAKON O PROMENI MOMENTA KOLIČINE KRETANJA SISTEMA

Količina kretanja $\vec{K}$ je karakteristika translatornog kretanja, moment količine kretanja -zamah $\vec{L}_0$ karakteriše obrtno kretanje.

Glavni moment količine kretanja sistema: $\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i x m\vec{v}_i$ jednak je vektorskom zbiru momenata količine kretanja svih tačaka sistema.

U odnosu na koordinatnu osu može se pisati: $K_i = m_i v_i = m_i r_i \omega, \Rightarrow L_{zi} = r_i K_i = m_i r_i^2 \omega, \;\Rightarrow\; \boxed{L_z = J_z\omega}$ tj. zamah za osu obrtanja je jednak proizvodu momenta inercije tela za tu osu i ugaone brzine tela.

$$\frac{d\vec{L}_{0i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i x m_i\vec{v}_i\right) = \vec{r}_i x\left(\vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u\right); \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i x\vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i x\vec{F}_i^u . \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O^{\vec{F}_i^s}.}$$

Zakon o promeni glavnog momenta količine kretanja: *izvod glavnog momenta količine kretanja sistema, jednak je vektorskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu istu tačku.*

Projektovanjem se dobija: $\frac{dL_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_x^{\vec{F}_i^s}$;..... , ili na drugi način: $\boxed{\frac{dL_z}{dt} = J_z\dot{\omega} = J_z\varepsilon}$.

Zakon o očuvanju glavnog momenta količine kretanja sistema:

1) $\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, tj. $\vec{L}_O = const.$ 2) $\sum M_z^{F_i^s} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0,\; tj.\, L_z = J_z\omega = const.$

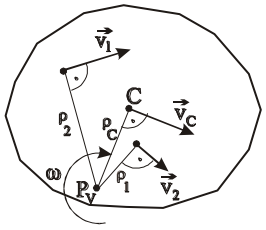
Kada se pojedine tačke udaljavaju od ose, povećava se J_z, ugaona brzina će se smanjivati i obrnuto.

4.6. KINETIČKA ENERGIJA SISTEMA

Kinetička energija sistema materijalnih tačaka jednaka je: $E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$.

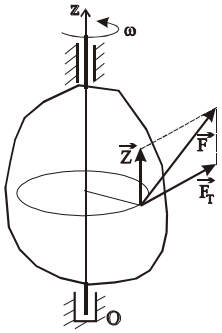
1. Translatorno kretanje. Brzine svih tačaka su paralelne i jednake $\Rightarrow$ $\boxed{E_k = \frac{1}{2} M v_C^2.}$

2. Obrtno kretanje. Brzina i-te tačke tela $v_i = r_i\omega \Rightarrow$ $E_k = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega^2 \Rightarrow$ $\boxed{E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2.}$



3. Ravno kretanje.
Izraz za kinetičku energiju jednak je zbiru E_K translacije sa brzinom središta i E_K obrtnog kretanja oko središta: $\boxed{E_k = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2}$

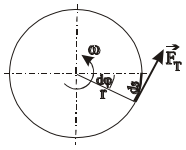
4.7. RAČUNANJE RADOVA



4.7.1. Rad sile koja izvodi obrtanje tela oko ose

Ako se sila razloži na komponentu paralelnu sa osom rotacije Oz i komponentu u ravni upravnoj na osu rotacije $\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{Z}$, obrtanje oko ose Oz vrši samo komponenta F_T:

$ds = r d\varphi \Rightarrow d\mathbf{A} = F_T ds = F_T r d\varphi.$ $\qquad M_z^{\vec{F}} = F_T r$, $d\mathbf{A} = M_z^{\vec{F}} d\varphi$.

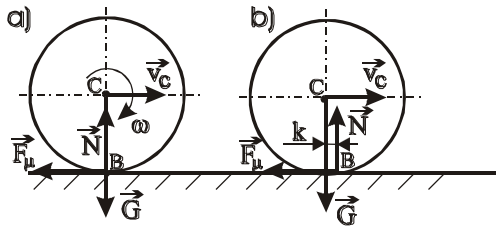


Pri obrtanju tela za konačan ugao φ_1 rad sile jednak je: $\mathbf{A} = \int_0^{\varphi_1} M_z^F d\varphi.$

Kada je $F=const.$ $\Rightarrow$ $\mathbf{A} = M_z^F \int_0^{\varphi_1} d\varphi \Rightarrow \boxed{\mathbf{A} = M_z^F \varphi_1.}$

4.7.1. Rad sile trenja (otpora) pri kotrljanju

Otpor kotrljanju, usled deformacije podloge, izaziva pojavu sprega $M=kN$ (k je krak otpora kotrljanja). Elementarni rad ovog sprega jednak je:



$d\mathbf{A} = -M d\varphi = -kN d\varphi, \quad d\varphi = ds_C/R \quad \Rightarrow d\mathbf{A} = -kN\frac{ds_C}{R}.$

Ako je $N=const.$ rad otpora kotrljanja biće jednak: $\mathbf{A} = -\frac{k}{R} N \int ds_C = -\frac{k}{R} N \cdot s_C \Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{A} = -kN\frac{s_C}{R}}$, gde je s_C pomeranje težišta tela.

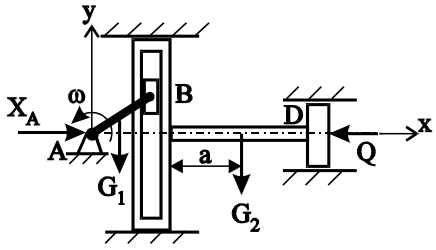
4.8. ZAKON O PROMENI KINETIČKE ENERGIJE SISTEMA

Zakon promene kinetičke energije za tačku primenjujemo za i-tu tačku sistema (uzimajući spoljašnje i unutrašnje sile): $dE_k = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = d\mathbf{A}_i^s + d\mathbf{A}_i^u$, nakon sabiranja svih jednačina: $d\sum\frac{m_i v_i^2}{2} = dE_k = \sum d\mathbf{A}_i^s + \sum d\mathbf{A}_i^u$, Integracijom se dobija konačan izraz: $\boxed{E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i^s + \sum \mathbf{A}_i^u.}$

Promena kinetičke energije sistema, pri nekom pomeranju, jednaka je sumi radova na tom pomeranju, svih spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje na sistem deluju. Kod apsolutno krutog tela i kada na sistem deluju idealne veze (glatka površina, kotrljanje bez klizanja), zbir radova svih unutrašnjih sila jednak je nuli. Primenjuje se za određivanje brzina, ubrzanja ili radova.

4.9. ZADACI IZ DINAMIKE TELA

ZADATAK 4.1. (**Zakon o kretanju središta masa**): Krivaja AB, dužine $r=0,2m$ i težine $G_1=10N$, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega=2\ rad/s$, dovodeći u kretanje kulisu i klip D, povezan sa njom (čija je ukupna težina $G_2=20N$, dužina $2a=0,4m$). Na klip, u toku kretanja deluje konstantna sila $Q=50N$. Zanemarujući trenje, naći najveći horizontalni pritisak X_A na osovinu A krivaje. Uzeti da je $g \cong 10m/s^2$.



Rešenje: Posmatraćemo kretanje celog sistema:

$$M\ddot{x}_C = \sum X_i^s = X_A - Q. \quad \text{Ovde je: } \sphericalangle BAD = \varphi = \omega t,$$

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{M};\ m_1 = \frac{G_1}{g} = \frac{10}{10} = 1kg,\ \ m_2 = \frac{G_2}{g} = \frac{20}{10} = 2kg;$$

$$x_1 = \frac{r}{2}\cos\omega t = 0,1\cos 2t,\ \ x_2 = a + r\cos\omega t = 0,2 + 0,2\cos 2t.$$

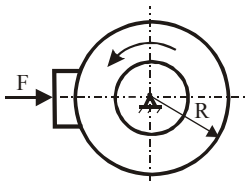
Diferenciranjem koordinate težišta po vremenu dobijamo:

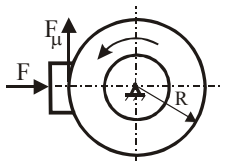
$$x_C = \frac{1\cdot 0,1\cos 2t + 2\cdot(0,2 + 0,2\cos 2t)}{3},\ \ \ddot{x}_C = -\frac{1}{3}(0,1 + 0,4)\cdot 4\cos 2t = -\frac{2}{3}\cos 2t.$$

$$X_A = Q + M\ddot{x}_C = 50 - 3\cdot\frac{2}{3}\cos 2t = 50 - 2\cos 2t.$$

Maksimalnu vrednost pritiska imaćemo za $\cos 2t=-1$: $X_{A\max} = 50 + 2 = 52N.$

ZADATAK 4.2. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema**): Disk mase $m=12kg$, poluprečnika $R=12cm$, rotira sa $n=600ob/min$ oko nepomične ose O kroz centar. Odrediti potrebni koeficijent trenja između kočnice i diska da bi se disk zaustavio nakon 20 obrtaja, pritiskom kočnice na disk silom od $F=90N$. Poluprečnik inercije diska jednak je $i=0,2m$. Odrediti vreme do zaustavljanja. Trenje u osloncu zanemariti.





Rešenje: Primenićemo zakon promene kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{F_\mu}$. Kinetička energija pri obrtnom kretanju jednaka je $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$, gde je moment inercije $J = mi^2 = 12\cdot 0,2^2 = 0,48kgm^2$. Početna ugaona brzina obrtanja diska jednaka je: $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi\cdot 600}{30} = 20\pi = 62,8\frac{rad}{s}$. Na kraju kretanja je ugaona brzina, a samim tim i kinetička energija diska, jednaka nuli. Ugao koji disk opiše za $N=25ob$ jednak je $\varphi = 2\pi N = 50\pi = 157rad = 157\frac{180}{\pi} = 9000^0$. Pošto je sila trenja $F_\mu = \mu N$, rad sile trenja jednak je:

$$\mathbf{A}_{F_\mu} = -M\cdot\varphi = -(F_\mu R)\cdot\varphi = -(\mu FR)\cdot\varphi = -\mu\cdot 90\cdot 0,12\cdot 157 = -1695,6\mu.$$

Zamenom svih vrednosti dobijamo:

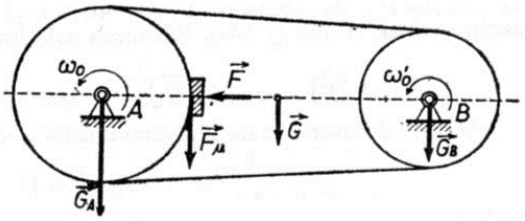
$$0 - \frac{1}{2}J\omega^2 = -F_\mu R\varphi \rightarrow -\frac{1}{2}0,48\cdot 62,8^2 = -1695,6\mu \rightarrow\ \ 946,5 = 1695,6\mu \rightarrow\ \ \mu = \frac{946,5}{1695,6} = 0,558.$$

Iz jednačina jednakousporenog obrtanja sledi:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t \qquad \rightarrow \qquad 0 = \omega_0 - \varepsilon t \rightarrow\ \ \varepsilon t = \omega_0 = 62,8 \rightarrow\ \ \varepsilon = \frac{62,8}{t}.$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \rightarrow\ \ 157 = 62,8t - \frac{1}{2}\frac{62,8}{t}t^2 \rightarrow\ \ 157 = 62,8t - 31,4t \rightarrow\ \ t = \frac{157}{31.4} = 5s.$$

ZADATAK 4.3. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema**): Kaišnici A i B, spojeni kaišem obrću se tako da kaišnik A ima ugaonu brzinu $\omega_0 = 31{,}4\, rad/s$. Masa kaišnika A, poluprečnika *R=15cm*, iznosi *4,5kg*. Masa kaišnika B, poluprečnika *r=10cm*, iznosi *3kg* a masa kaiša je *1kg*. Da bi se kočilo ovo obrtanje, na kaišnik A se deluje silom *F=80N*, preko papuče za kočenje. Koeficijent trenja papuče o kaišnik iznosi *μ=0,45*. Zanemarujući trenje u ležištima i smatrajući da su kaišnici homogeni puni diskovi, odrediti koliki će broj obrtaja izvršiti kaišnik A dok se ne zaustavi.



Rešenje: Zakon promene kinetičke enegije sistema glasi: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ gde je $E_{k1} = 0.$ Brzine svih tačaka kaiša su jednake međusobno: $v_k = R\omega_0 = r\omega_0' = 0{,}15 \cdot 31{,}4 = 4{,}71 m/s$,

pa sledi $\omega_0' = \dfrac{v_k}{r} = \dfrac{4{,}71}{0{,}1} = 47{,}1 \dfrac{rad}{s}$.

Momenti inercije kaišnika: $J_A = \frac{1}{2} m_A R^2 = \frac{1}{2} 4{,}5 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}0506 kgm^2$, $J_B = \frac{1}{2} m_B r^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}015 kgm^2$.

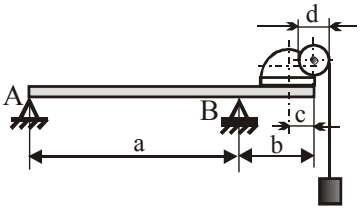
Sa tim podacima se mogu izračunati kinetičke energije pojedinih tela i celog sistema: $E_{kA} = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2$; $E_{kB} = \frac{1}{2} J_B \omega_0'^2$; $E_{kK} = \frac{1}{2} m_k v_k^2 \rightarrow \sum E_{ki} = E_{kA} + E_{kB} + E_{kK} = 24{,}94 + 16{,}64 + 11{,}09 = 52{,}67 kgm^2/s^2$.

Rad sile teže jednak je nuli (težišta se pri kretanju ne pomeraju). Ugao obrtanja do zaustavljanja $\varphi = 2\pi N$, rad sile trenja:

$$\mathbf{A}_{F_\mu} = -(\mu F R) \cdot \varphi = -(\mu F R) \cdot 2\pi N = -0{,}45 \cdot 80 \cdot 0{,}15 \cdot 2\pi N = -33{,}9 \cdot N.$$

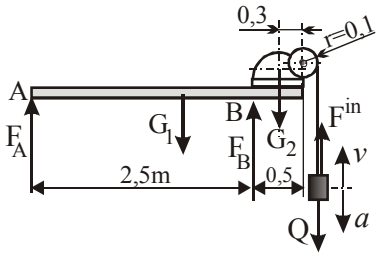
Zamenom svih vrednosti u izraz $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ dobijamo:

$$0 - 52{,}67 = -33{,}9N \rightarrow 52{,}67 = 33{,}9N \rightarrow N = \frac{52{,}67}{33{,}9} = 1{,}55.$$



ZADATAK 4.4. (**Dalamberov princip):** Dizalica, na prepustu grednog nosača *AB,* podiže teret težine *Q=20N* sa usporenjem *a=2m/s²*. Odrediti reakcije u osloncima grede ako je težina grede G_1*=40N*, težina dizalice G_2*=10N*. Dato: *a=2,5m*; *b=0,5m; c=30cm; d=20cm*.

Rešenje: Teret se podiže sa usporenjem pa je vektor $\vec{a}$ usmeren suprotno vektoru brzine. Inercijalna sila je usmerena suprotno smeru ubrzanja tereta i ima intenzitet: $F^{in} = ma = \dfrac{Q}{g} a = \dfrac{20}{9{,}81} \cdot 2 = 4{,}08N$.



Na sistem deluju sile (aktivne, reaktivne i inercijalne):

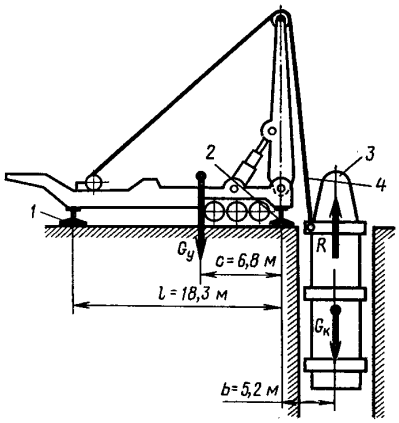
$\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{Q}, \vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}^{in}$.

Iz uslova fiktivne ravnoteže sledi:

$$\sum M_A = 0;\ F_B \cdot 2{,}5 - Q \cdot 3{,}1 + F^{in} \cdot 3{,}1 - G_2 \cdot 2{,}7 - G_1 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$2{,}5F_B - 20 \cdot 3{,}1 + 4{,}08 \cdot 3{,}1 - 10 \cdot 2{,}7 - 40 \cdot 1{,}5 = 0 \rightarrow \quad 2{,}5F_B - 136{,}35 = 0 \quad \rightarrow F_B = 54{,}54N.$$

$$\sum Y_i = 0;\ F_A + F_B + F^{in} - G_1 - G_2 - Q = 0 \rightarrow \quad F_A + 54{,}54 + 4{,}08 - 40 - 10 - 20 = 0 \rightarrow F_A = 11{,}38N.$$



ZADATAK 4.5. (**Dalamberov princip):** Odrediti intenzitete vertikalnih reaktivnih sila na prednjim i zadnjim osloncima dizalice pri spuštanju kontejnera 3. Spuštanje se obavlja sa usporenjem $a= 2,45m/s^2$. Težina dizalice $G_y=46,8kN$; težina kontejnera $G_K=18kN$ a sila otpora spuštanju kontejnera $R=12kN$. Veličine rastojanja su date na slici.

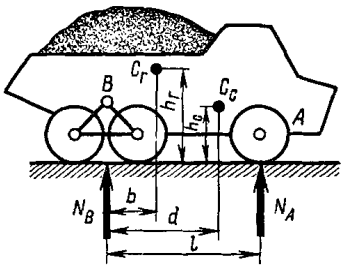
Rešenje: Inercijalna sila je usmerena nadole i brojno je jednaka:

$$F^{in} = ma = \frac{G_K}{g}a = \frac{18}{9,81}\cdot 2,45 = 4,5kN.$$

Iz uslova fiktivne ravnoteže sledi:

$$\sum M_{(1)} = 0 \rightarrow \quad Y_2 = 42,9kN, \qquad \sum Y_i = 0 \rightarrow \qquad Y_1 = 14,4kN$$

ZADATAK 4.6. (**Dalamberov princip):** Transportno vozilo, mase $m=10t$, prevozi teret iste mase. Položaji težišta vozila i tereta su dati na slici, pri čemu su dužine: $b=2,3m;\ d=3,8m;\ l=5,8m,\ h_r=2,1m;\ h_C=1,7m$. Naći ubrzanje vozila ako su zadnji točkovi pogonski a koeficijent trenja između točkova i podloge $\mu=0,6$.

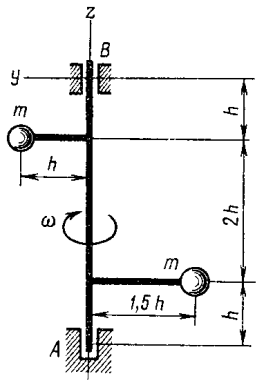


Rešenje: Inercijalne sile vozila i tereta su usmerene suprotno smeru ubrzanja, intenziteta: $F^{in} = ma$. Težine tereta i vozila su jednake i iznose $G = mg = 9810N$. Sila trenja deluje na pogonski točak suprotno smeru obrtanja tj. u smeru kretanja: $F_\mu = \mu N_B$. Iz uslova fiktivne ravnoteže dobija se:

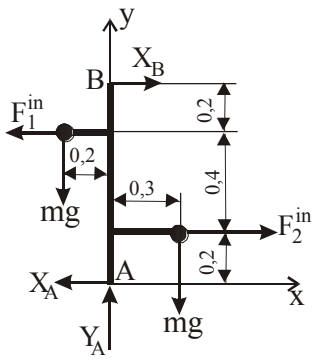
$$\sum M_A = 0;\ N_B\cdot 5,8 - G(5,8-3,8) - G(5,8-2,3) - F^{in}\cdot 1,7 - F^{in}\cdot 2,1 = 0 \rightarrow N_B = 0,95G + 0,655F^{in}.$$

$$F_\mu = \mu N_B = 0,6\left(0,95G + 0,655F^{in}\right) = 0,57G + 0,393F^{in}$$

$$\sum X_i = 0;\ F_\mu - F^{in} - F^{in} = 0 \rightarrow\ 0,57G + 0,393F^{in} - 2F^{in} = 0 \rightarrow 0,57mg - 1,607ma = 0 \rightarrow a = \frac{0,57mg}{1,607m} = 3,48\frac{m}{s^2}.$$



ZADATAK 4.7. (**Dalamberov princip):** Na osovini AB, zanemarljive težine, koja se ravnomerno obrće konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 7\,rad/s$, učvršćena su dva jednaka tereta čije su mase $m=1kg$. Odrediti reakcije u osloncima A i B za prikazani položaj ako je $h=20cm$.



Rešenje:
Ubrzanja tereta će biti jednaka (uzimajući da je rastojanje $h=0,2m$):

$$a_1 = a_N = h\omega^2 = 0,2\cdot 7^2 = 9,8\frac{m}{s^2},$$

$$a_2 = a_N = 1,5h\omega^2 = 14,7\frac{m}{s^2},$$

(tangencijalna komponenta ubrzanja je jednaka nuli pri obrtanju konstantnom ugaonom brzinom). Normalna ubrzanja su usmerena ka osi rotacije, inercijalne sile su usmerene suprotno od njih i imaju intenzitete:

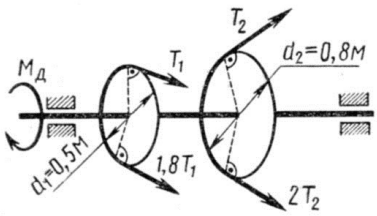
$F_1^{in} = ma_1 = 1\cdot 9,8 = 9,8N,\ F_2^{in} = ma_2 = 1\cdot 14,7 = 14,7N$. Iz uslova fiktivne ravnoteže sledi:

$$\sum Y_i = 0;\ Y_A - mg - mg = 0 \qquad \rightarrow\ Y_A = 2mg = 2\cdot 1\cdot 9,81 = 19,62N,$$

$$\sum M_A = 0;\ X_B\cdot 0,8 + F_2^{in}\cdot 0,2 - F_1^{in}\cdot 0,6 + mg\cdot 0,3 - mg\cdot 0,2 = 0$$

$$0,8X_B + 14,7\cdot 0,2 - 9,8\cdot 0,6 + 9,81\cdot 0,3 - 9,81\cdot 0,2 = 0 \rightarrow\ 0,8X_B - 1,959 = 0\ \rightarrow\ X_B = 2,45N.$$

$$\sum X_i = 0;\ X_B + F_2^{in} - F_1^{in} - X_A = 0 \rightarrow\ X_A = 7,35N.$$



ZADATAK 4.8. (**Rad, Snaga):** Na vratilu, koje se obrće konstantnim brojem obrtaja *n=750ob/min*, učvršćeni su pogonski kaišnici datih prečnika. Sile u slobodnim ograncima kaiševa iznose $T_1=1800N$ i $T_2=1500N$. Odrediti rad koji vrši pogonski moment M_d za *t=20min* i potrebnu snagu *P*.

Rešenje: Ugaona brzina: $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 750}{30} = 25\pi = 78{,}5\frac{rad}{s}$,

za *t=20min=1200s* ugao obrtanja vratila: $\varphi = \omega t = 25\pi \cdot 1200 = 30000\pi\, rad$.

Momenti na kaišnicima računaju se preko obimnih sila:

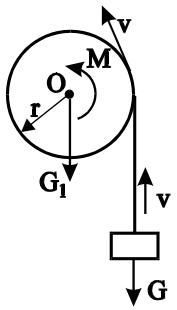
$$M_1 = (1{,}8T_1 - T_1)\frac{d_1}{2} = 0{,}8 \cdot 1800\frac{0{,}5}{2} = 360Nm = 0{,}36kNm,$$

$$M_2 = (2T_2 - T_2)\frac{d_2}{2} = 1500\frac{0{,}8}{2} = 600Nm = 0{,}6kNm.$$

Ukupan rad: $\mathbf{A} = M_1\varphi + M_2\varphi = (0{,}36 + 0{,}6)\cdot 30000\pi = 28800\pi\ kJ$;

potrebna snaga: $P = \frac{\mathbf{A}}{t} = \frac{28800\pi}{1200} = 75{,}4kW$.

ZADATAK 4.9. (**Zakon o promeni momenta količine kretanja):** Na točak poluprečnika *r=40cm*, težine $G_1=20N$, koji se obrće oko nepomične horizontalne ose O, namotan je konac na čijem je kraju teret *G=30N*. Na točak deluje obrtni moment *M=40Nm*. Smatrajući točak materijalnim kružnim prstenom, odrediti ubrzanje tereta *a*.



Rešenje: Primenom zakona o promeni momenta količine kretanja $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{F_i^s}$,

gde je *z* osa postavljena kroz tačku O, normalno na ravan točka dobija se:

$$\sum M_z^{F_i^s} = M - Gr = 40 - 30\cdot 0{,}4 = 28Nm; \qquad m = \frac{G}{g} = \frac{30}{10} = 3kg,\ m_1 = \frac{G_1}{g} = 2kg,$$

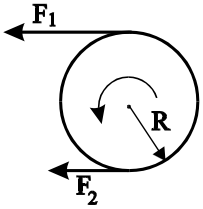
$$L_z = (L_z)_{ter} + (L_z)_{toc} = rmv + rm_1v = rv(m + m_1) = 0{,}4v\cdot 5 = 2v$$

$$\frac{dL_z}{dt} = 2\frac{dv}{dt};\ 2\frac{dv}{dt} = 28, \quad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \frac{28}{2} = 14\frac{m}{s^2}.$$

ZADATAK 4.10. (**Zakon o promeni momenta količine kretanja):** Odrediti ugaono ubrzanje točka, (poluprečnika *R=0,4m,* težine *G=40N*, poluprečnika inercije za osu obrtanja $i_z=0{,}2m$), ako su sile u kaišniku, koji točak dovodi u kretanje, $F_1=60N$ i $F_2=50N$.

Rešenje: Po zakonu promene momenta količine kretanja imamo:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{F_i^s};\ \sum M_z^{F_i^s} = F_1R - F_2R = 0{,}4(60 - 50) = 4Nm.$$



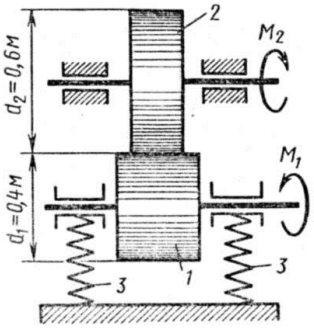
$$J_z = Mi_z^2; \quad L_z = J_z\omega = \frac{G}{g}i_z^2\omega = \frac{40}{10}\cdot 0{,}04\cdot\omega = 0{,}16\omega; \quad \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}16\omega) = 0{,}16\varepsilon;$$

$$0{,}16\varepsilon = 4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{4}{0{,}16} = 25\frac{rad}{s^2}.$$

ZADATAK 4.11. (**Zakon o promeni momenta količine kretanja):** U frikcionom prenosniku, pritisna sila između vodećeg 1 i vođenog frikcionog točka 2, obezbeđuje se oprugama 3. Odrediti veličinu momenta M_1 na vodećem vratilu i minimalnu silu pritiska opruga ako na vođeno vratilo deluje otporni moment $M_2=2{,}5kNm$. Mase točkova su: $m_1=25kg$ i $m_2=75kg$, poluprečnik inercije

vodećeg točka $i_1=0,35d_1$ a vođeni točak smatrati homogenim diskom. Ugaono ubrzanje vratila 2 je $\varepsilon_2=250\ rad/s^2$, koeficijent trenja među točkovima $\mu=0,3$.

<u>*Rešenje*</u>: Momenti inercije točkova:



$$J_{z1}=m_1 i_1^2=25(0,35\cdot 0,4)^2=0,49kgm^2,$$

$$J_{z2}=\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=\frac{1}{2}75\cdot 0,3^2=3,375kgm^2.$$

Zakon promene momenta količine kretanja za telo 2: $\frac{dL_z}{dt}=\sum M_z^{F_i}\rightarrow J_{z2}\cdot\varepsilon_2=-M_2+(\mu F)\frac{d_2}{2}$,

$$3,375\cdot 250=-2500+0,3F\cdot 0,3\rightarrow 843,75=-2500+0,09F\rightarrow 0,09F=3343,75\rightarrow$$

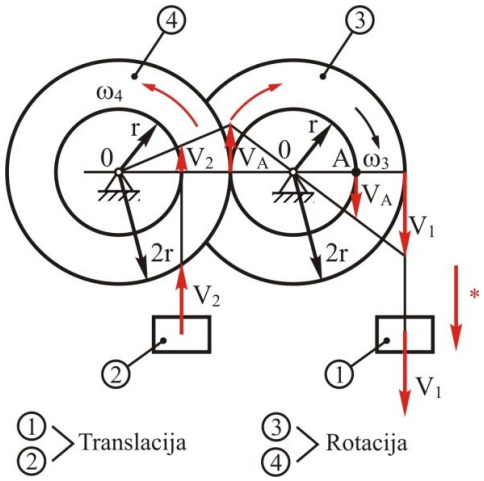
Pošto je $r_1\omega_1=r_2\omega_2\rightarrow\omega_1=\frac{r_2\omega_2}{r_1}=\frac{0,3\omega_2}{0,2}=1,5\omega_2$, odnosno $\frac{d\omega_1}{dt}=1,5\frac{d\omega_2}{dt}\rightarrow\varepsilon_1=1,5\varepsilon_2=375\frac{rad}{s^2}$.

Zakon promene momenta količine kretanja za telo 1: $\frac{dL_z}{dt}=\sum M_z^{F_i}\rightarrow J_{z1}\cdot\varepsilon_1=M_1-(\mu F)\frac{d_1}{2}$,

$$0,49\cdot 375=M_1-0,3\cdot 37152,8\cdot 0,2\rightarrow 183,75=M_1-2229,2\rightarrow\ M_1=2229,2+183,75=2412,95Nm=2,41kNm.$$

4.10. <u>BRZINE KRETANJA ELEMENATA SISTEMA I NJIHOV ODNOS</u>

<u>Mehanički sistem 1:</u>



Telo 1 kreće se brzinom v_1,

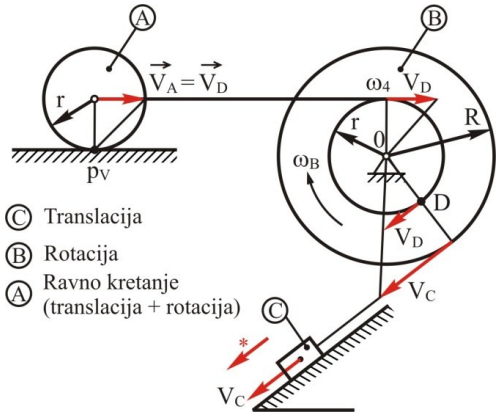
Iz sličnosti trouglova: $\frac{v_1}{2r}=\frac{v_A}{r}\ \rightarrow\ v_A=\frac{v_1\cdot r}{2r}=\frac{v_1}{2}$

Iz sličnosti trouglova: $\frac{v_A}{2r}=\frac{v_2}{r}$

Za telo 2 biće $v_2=\frac{v_A\cdot r}{2r}=\frac{v_A}{2}=\frac{v_1}{4}$

Telo 3 $\rightarrow\ \omega_3=\frac{v_1}{2r}$ Telo 4 $\rightarrow\omega_4=\frac{v_2}{r}=\frac{v_1}{4r}$

<u>Mehanički sistem 2:</u>

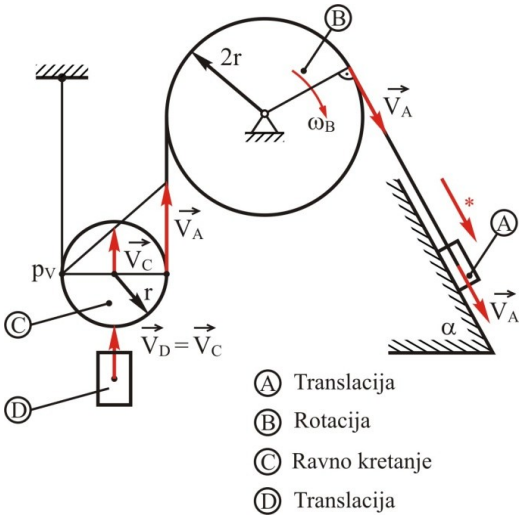


Telo C kreće se brzinom v_C,

Iz sličnosti trouglova: $\frac{v_C}{R}=\frac{v_D}{r}\ \rightarrow\ v_D=\frac{v_C\cdot r}{R}$

$$\omega_B=\frac{v_C}{R}=\frac{v_D}{r}=\frac{v_C\cdot\frac{r}{R}}{r}=\frac{v_C\cdot r}{R\cdot r}=\frac{v_C}{R}$$

Brzina centra tela A $\rightarrow\ v_A=v_D=v_C\frac{r}{R}$



Mehanički sistem 3:

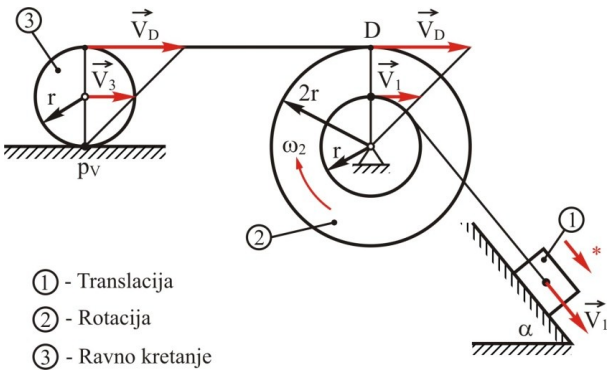
Telo A kreće se brzinom v_A,

Telo B $\rightarrow \omega_B = \dfrac{v_A}{2r}$

Telo C $\rightarrow$

Iz sličnosti trouglova $\dfrac{v_A}{2r} = \dfrac{v_C}{r} \rightarrow v_C = \dfrac{v_A \cdot r}{2r} = \dfrac{v_A}{2}$

Telo D $\rightarrow v_D = v_C = \dfrac{v_A}{2}$



Mehanički sistem 4:

Telo 1 kreće se brzinom v_1,

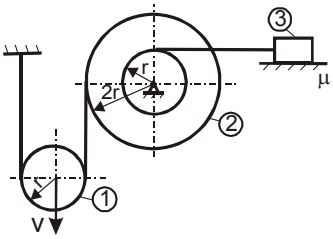
Telo 2: Iz sličnosti trouglova

$$\frac{v_1}{r} = \frac{v_D}{2r} \rightarrow v_D = 2v_1$$

$$\omega_2 = \frac{v_D}{2r} = \frac{v_1}{r}$$

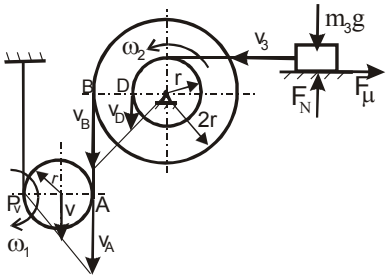
Telo 3: Iz sličnosti trouglova

$$\frac{v_D}{2r} = \frac{v_3}{r} = \rightarrow v_3 = \frac{v_D}{2} = v_1$$



ZADATAK 4.12. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema):** Materijalni sistem čine tri tela. Telo 1 je homogeni kotur poluprečnika $r=0,1m$ i mase $m_1=2kg$. Telo 2 je koaksijalni kalem, poluprečnika r i $2r$, mase $m_2=4kg$, poluprečnika inercije za osu rotacije $i_2=0,07m$. Teret 3, mase $m_1=1kg$, klizi po hrapavoj horizontalnoj ravni koeficijenta trenja klizanja $\mu=0,25$. Tela povezuje lako nerastegljivo uže. Ceo sistem se kreće u vertikalnoj ravni, bez početne brzine, pri čemu je brzina centra tela 1 jednaka $v=v(t)$. Naći ubrzanje tela 1.

Rešenje: Telo 1 vrši ravno kretanje, trenutni pol brzina nalazi se u tački dodira diska i nepokretnog kraja užeta, pa je: $\omega_1 = \dfrac{v}{CP_v} = \dfrac{v}{r} = \dfrac{v}{0,1}$. Brzina tačke A na telu 1 je: $v_A = AP_v \cdot \omega_1 = 2r \cdot \dfrac{v}{r} = 2v$. Tačka B na telu 2 imaće istu brzinu kao i tačka A tj. $v_B=v_A=2v$. Telo 2 vrši rotaciju oko nepomične ose pa je: $\omega_2 = \dfrac{v_B}{2r} = \dfrac{2v}{2r} = \dfrac{v}{r}$. Brzina tačke D na telu 2: $v_D = r \cdot \omega_2 = r \cdot \dfrac{v}{r} = v$, i jednaka je brzini tela 3 koje se kreće translatorno , tj. $v_3=v_D=v$.



Zakon promene kinetičke energije glasi: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ gde je $E_{k0} = 0$ jer sistem kreće iz stanja mirovanja.

Izrazi za kinetičke energije (u funkciji brzine v):

telo 1 (ravno kretanje)- disk je homogen pa je

$J_1 = \dfrac{1}{2} m_1 r^2$, $\omega_1 = \dfrac{v_{C1}}{r}$ odnosno $E_{k1} = \dfrac{3}{4} m_1 v_{C1}^2 = \dfrac{3}{4} \cdot 2 \cdot v^2 = 1,5v^2$;

telo 2 (rotacija) - $J_2 = m_2 i_2^2 = 4 \cdot 0,07^2 = 0,02 kgm^2$,

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot \left(\frac{v}{0,1}\right)^2 = 0,01 \frac{v^2}{0,01} = v^2$$

telo 3 (translacija) - $E_{k3} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v^2 = 0{,}5v^2$;

$\rightarrow \sum E_{ki} = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} = 1{,}5v^2 + v^2 + 0{,}5v^2 = 3v^2.$

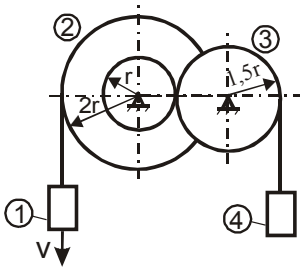
Izrazi za radove sila (u funkciji pomeranja *s*): za telo 1 (težište tela se pomera nadole za $h_1=s$) - $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{mg} = +m_1 g h_1 = 2 \cdot 9{,}81s = 19{,}62s$; za telo 2 je rad teže jednak nuli jer nema pomeranja težišta;

za telo 3 (nema visinskog pomeranja težišta pa je $\mathbf{A}_{mg} = 0$, samo sila trenja vrši rad) - $F_N = m_3 g \rightarrow F_\mu = \mu F_N = \mu m_3 g = 0{,}25 \cdot 1 \cdot 9{,}81 = 2{,}45N$; $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_{F_\mu} = -F_\mu s = -2{,}45s.$

$\sum \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = 19{,}62s + 0 - 2{,}45s = 17{,}17s.$ Zamenom u $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ dobijamo: $3v^2 = 17{,}17s$,

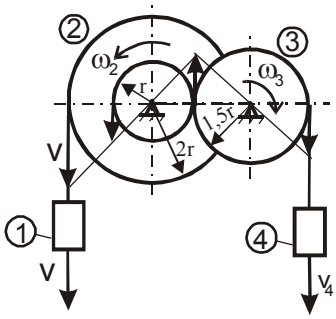
a diferenciranjem: $3 \cdot 2v \frac{dv}{dt} = 17{,}17 \frac{ds}{dt} \rightarrow 6v \cdot a = 17{,}17v \rightarrow 6a = 17{,}17 \rightarrow a = \frac{17{,}17}{6} = 2{,}86 \frac{m}{s^2}.$

ZADATAK 4.13. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema):** Materijalni sistem čine četiri tela. Teret 1, mase $m_1=1kg$, se kreće nadole. Telo 2 je koaksijalni kalem većeg poluprečnika $2r=0{,}4m$ sa ozubljenim delom poluprečnika $r=0{,}2m$. Telo 2 je mase $m_2=4kg$, poluprečnika inercije za osu rotacije $i_2=0{,}3m$. Delom svoje širine ozubljeno telo 3 smatrati homogenim diskom, poluprečnika $r_3=1{,}5r=0{,}3m$, mase $m_3=4kg$. Teret 4 ima masu $m_4=1kg$. Tela su povezana lakim nerastegljivim užetom. Ceo sistem se kreće u vertikalnoj ravni, bez početne brzine. Naći ubrzanje tela 1.



Rešenje: Telo 1 vrši translatorno kretanje brzinom *v*. Telo 2 vrši rotaciju oko nepomične ose pa je: $\omega_2 = \frac{v}{2r}$. Brzina tačke na telu 2 koja je u dodiru sa telom 3: $v_D = r \cdot \omega_2 = r \cdot \frac{v}{2r} = \frac{v}{2} = 0{,}5v$. Telo 3 vrši rotaciju oko nepomične ose pa je: $\omega_3 = \frac{v_D}{1{,}5r} = \frac{0{,}5v}{1{,}5r} = \frac{v}{3r}$.

Brzina tačaka na obimu diska 3 jednake su brzini tela 4 koje se kreće translatorno , tj. $v_D=v_3=0{,}5v$.



Zakon promene kinetičke energije: $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ gde je $E_{k0} = 0$ jer sistem kreće iz stanja mirovanja.

Izrazi za kinetičke energije (u funkciji brzine *v*):

za telo 1 (translatorno kretanje)- $E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v^2 = 0{,}5v^2$;

za telo 2 (rotacija) - $J_2 = m_2 i_2^2 = 4 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}36 kgm^2$,

$E_{k2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}36 \cdot \left(\frac{v}{0{,}4}\right)^2 = 0{,}18 \frac{v^2}{0{,}16} = 1{,}125v^2$;

za disk 3 (rotacija) - $J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = 0{,}18 kgm^2$ $E_{k3} = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}18 \cdot \left(\frac{v}{0{,}6}\right)^2 = 0{,}25v^2$;

za telo 4 (translacija) - $E_{k4} = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0{,}5v)^2 = 0{,}125v^2$

$\rightarrow \sum E_{ki} = 0{,}5v^2 + 1{,}125v^2 + 0{,}25v^2 + 0{,}125v^2 = 2v^2.$

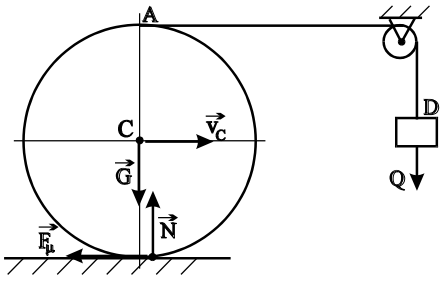
Izrazi za radove sila (u funkciji pomeranja *s*): za telo 1 (težište tela se pomera nadole za $h_1=s$) - $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{mg} = +m_1 g h_1 = 1 \cdot 9{,}81s = 9{,}81s$;

za tela 2 i 3 je rad sile teže jednak nuli jer nema pomeranja težišta;

za telo 4 (pomeranje $h_4=s_4$; pošto je $v_4=0{,}5v \rightarrow s_4=0{,}5s$) - $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_{mg} = +m_4 g h_4 = 1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5s = 4{,}905s$;

$\sum \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = 9{,}81s + 0 + 0 + 4{,}905s = 14{,}715s.$ Zamenom u $E_{k1} - E_{k0} = \sum \mathbf{A}_i$ dobijamo: $2v^2 = 14{,}715s$,

a diferenciranjem po vremenu: $2 \cdot 2v \frac{dv}{dt} = 14{,}715 \frac{ds}{dt} \rightarrow 4v \cdot a = 14{,}715v \rightarrow a = \frac{14{,}715}{4} = 3{,}68 \frac{m}{s^2}.$



ZADATAK 4.14. (**Zakon o promeni kinetičke energije sistema):** Na disk, poluprečnika $R=0,5m$ i težine $G=50N$, namotano je uže, prebačeno preko nepomičnog kotura O i zategnuto teretom D, težine $Q=40N$. Odrediti brzinu i ubrzanje centra diska C, nakon pređenog puta s, ako je $v_{C0}=0$. Krak otpora kotrljanja diska je $k=0,1m$, poluprečnik inercije diska za centralnu osu je $i=0,4m$. Masu konca i kotura o zanemariti.

Rešenje: $E_{k0}=0$, tj. $E_k=\Sigma A_i$. (a)

$$E_k = E_{kter} + E_{kdisk} = \frac{1}{2}m_t v_D^2 + \left(\frac{1}{2}m_d v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2\right);$$

$$m_t = \frac{Q}{g} = 4kg,\ m_d = \frac{G}{g} = 5kg, \quad \omega = \frac{v_C}{R} = \frac{v_C}{0,5} = 2v_C,$$

$v_D=v_A=2v_C$, $\quad J_z = m_d \cdot i^2 = 5\cdot 0,4^2 = 0,8kgm^2$

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot (2v_C)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot v_C^2 + \frac{1}{2}\cdot 0,8\cdot (2v_C)^2\right) = v_C^2(8+2,5+1,6) = 12,1v_C^2;$$

Rad vrši sila Q i spreg koje čine sile N i G. Pošto je $v_D = 2v_C$, pomeranje tereta $h=2s$ (gde je s pomeranje centra diska). Radovi sila jednaki su:

$$\mathbf{A}_Q=hQ=2sQ=80s,\ \ \mathbf{A}_{kotr} = -\frac{k}{R}Gs = -\frac{0,1}{0,5}\cdot 50s = -10s,\ \ \sum \mathbf{A}_i = 80s - 10s = 70s.$$

Zamenjujući u jednačinu (a) dobijamo brzinu centra diska: $12,1v_C^2 = 70s \rightarrow v_C^2 = \frac{70}{12,1}s = 5,78s$

Radi određivanja ubrzanja diferenciramo jednačinu po vremenu ($ds/dt=v_C$):

$$12,1\cdot 2v_C\frac{dv_C}{dt} = 70\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = a_C = \frac{70}{24,2} = 2,89\frac{m}{s^2}.$$

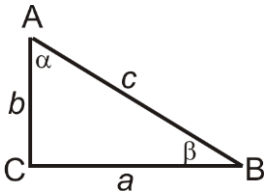
DODATAK – kratak pregled formula

Algebra

Stepenovanje: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

kvadratna jednačina: $ax^2 + bx + c = 0 \;\rightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Trigonometrija



$c^2 = a^2 + b^2$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \cos\beta = \dfrac{a}{c}, \quad tg\alpha = \dfrac{a}{b}$

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \sin\beta = \dfrac{b}{c}, \quad tg\beta = \dfrac{b}{a}$

Trigonometrijske identičnosti: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Merenje uglova: $1rad = \dfrac{180^0}{\pi} \;\rightarrow\; 180^0 = \pi, \quad 30^0 = \dfrac{\pi}{6}, \quad 60^0 = \dfrac{\pi}{3}, \quad 45^0 = \dfrac{\pi}{4}, \quad 90^0 = \dfrac{\pi}{2}.$

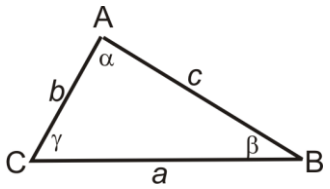
Adicione formule:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova:

α	0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1



Sinusna teorema: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Kosinusna teorema: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Izvodi $\quad y = f(x) \rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}; \quad y = f(t) \rightarrow \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$

	osnovne funkcije							zbir	proizvod
funkcija	const.	x^n	t^n	$\sin x$	$\sin t$	$\cos x$	$\cos t$	$u+v$	uv
izvod f-je	0	nx^{n-1}	nt^{n-1}	$\cos x$	$\cos t$	$-\sin x$	$-\sin t$	$u'+v'$	$u'v+v'u$

Primeri: $y = x^2 \rightarrow y' = 2x; \quad y = t^3 \rightarrow \dot{y} = 3t^2; \quad x = 2 \rightarrow \dot{x} = 0; \quad x = t \rightarrow \dot{x} = 1$

$y = \cos t \rightarrow \dot{y} = -\sin t; \quad x = 4\sin t \rightarrow \dot{x} = 4\cos t; \quad y = 2t - 5\cos t \rightarrow \dot{y} = 2\cdot 1 - 5\cdot(-\sin t) = 2 + 5\sin t$

Izvod složene funkcije:

$u = u(v),\, v = v(x) \rightarrow u' = u'(v)\cdot v'(x) \qquad u = u(v),\, v = v(t) \rightarrow \dot{u} = \dot{u}(v)\cdot\dot{v}(t)$

$x = \cos 2t \rightarrow \dot{x} = (\cos 2t)'\cdot(2t)' = (-\sin 2t)\cdot(2\cdot 1) = -2\sin 2t$

$y = 5\sin\pi t \rightarrow \dot{y} = 5(\sin\pi t)'\cdot(\pi t)' = 5(\cos\pi t)\cdot(\pi\cdot 1) = 5\pi\cos\pi t$

Integrali

$\int dx = x + C \qquad \int dt = t + C \qquad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \sin t dt = -\cos t + C \qquad \int \cos t dt = \sin t + C$

Primeri: $\int 2t dt = 2\int t dt = 2\dfrac{t^2}{2} = t^2 + C \qquad \int(\cos t + 4t^2)dt = \sin t + 4\dfrac{t^3}{3} + C$