8. VJEŽBE - DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Najprije ćemo promatrati homogeni slučaj kada je $f(x) = 0$,

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Pretpostavit ćemo da rješenje takve homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Zatim uvrstimo dobivene jednadžbe u homogenu jednadžbu

$$\begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \\ &e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \end{aligned}$$

gdje je zadnja jednakost ispunjena onda i samo onda kada je λ rješenje jednadžbe

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Ova se jednadžba naziva karakteristična jednadžba, čija su rješenja

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

U ovisnosti o parametrima a i b, razlikujemo tri oblika rješenja homogene DJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

1. Ako je $a^2 > 4b$, tada su λ_1 i λ_2 iz skupa realnih brojeva i međusobno različiti, a rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Ako je $a^2 = 4b$, tada su λ_1 i λ_2 iz skupa realnih brojeva i međusobno jednaki, a rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

3. Ako je $a^2 < 4b$, tada su λ_1 i λ_2 iz skupa kompleksnih brojeva i kompleksno konjugirani $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, a rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Zadatak 1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

gdje su parametri $a = 1$ i $b = -6$, što znači da je $a^2 > 4b$ i rješenja su realna i međusobno različita, $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$. Prema tome rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Zadatak 2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

uz početne uvjete $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.

Karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

gdje su parametri $a = -1$ i $b = -2$, što znači da je $a^2 > 4b$ i rješenja su realna i međusobno različita, $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$. Prema tome rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Sada trebamo naći vrijednosti konstanti uz zadane početne uvjete (riješiti Cauchyjevu zadaću). Derivacija dobivenog rješenja je

$$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x},$$

pa iz početnih uvjeta $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 = C_1 + C_2 \\ y'(0) &= 0 = 2C_1 - C_2 \end{aligned}$$

čija su rješenja $C_1 = \frac{1}{3}$ i $C_2 = \frac{2}{3}$, pa je rješenje DJ

$$y = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{2}{3} e^{-x}.$$

Zadatak 3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

gdje su parametri $a = 2$ i $b = 1$, što znači da je $a^2 = 4b$ i imamo dvostruko realno rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Prema tome rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Zadatak 4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

uz početne uvjete $y(0) = 3$ i $y'(0) = 2$.

Karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

gdje su parametri $a = -4$ i $b = 4$, što znači da je $a^2 = 4b$ i imamo dvostruko realno rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Prema tome rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Sada trebamo naći vrijednosti konstanti uz zadane početne uvjete (riješiti Cauchyjevu zadaću). Derivacija dobivenog rješenja je

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2(e^{2x} + 2xe^{2x}),$$

pa iz početnih uvjeta $y(0) = 3$ i $y'(0) = 2$, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} y(0) &= 3 = C_1 \\ y'(0) &= 2 = 2C_1 + C_2 \end{aligned}$$

čija su rješenja $C_1 = 3$ i $C_2 = -4$, pa je rješenje DJ

$$y = 3e^{2x} - 4xe^{2x}.$$

Zadatak 5. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

gdje su parametri $a = 2$ i $b = 5$, što znači da je $a^2 < 4b$ i rješenja su kompleksno konjugirana, $\lambda_1 = -1 + 2i$ i $\lambda_2 = -1 - 2i$, što znači da je $\alpha = -1$ i $\beta = 2$. Prema tome rješenje DJ zapisujemo u obliku

$$y = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x).$$

Zadatak 6. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 4y' + 5y = 0,$$