1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = x^3 - 3x + 2$

Oblast definisanosti (domen)

Kako zadata funkcija nema razlomak, to je $x \in (-\infty, \infty)$ to jest $x \in R$

Nule funkcije

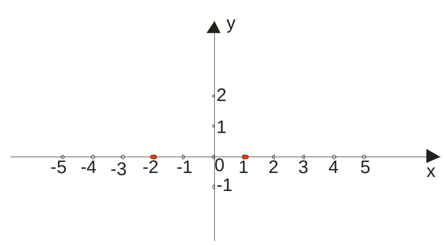
$y = 0$ to jest $x^3 - 3x + 2 = 0$

Ovo je jednačina trećeg stepena. U ovakvim situacijama možemo koristiti Bezuovu teoremu (pogledaj fajl iz 1. godine) ili da pokušamo sklapanje " 2 po 2".

$x^3 - 3x + 2 = 0$
$x^3 - x - 2x + 2 = 0$
$x(x^2 - 1) - 2x + 2 = 0$
$x\underline{(x-1)}(x+1) - 2\underline{(x-1)} = 0$ izvučemo zajednički
$(x-1)[x(x+1) - 2] = 0$
$(x-1)[x^2 + x - 2] = 0$
Kako je za $x^2 + x - 2 = 0$ $x_1 = 1, x_2 = -2$ a znamo formulicu $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ to je
$(x-1)(x-1)(x+2) = 0$
$(x-1)^2(x+2) = 0$

Nule funkcije su dakle x = 1 i x = - 2

Na skici to su mesta gde grafik funkcije seče x osu



Znak funkcije

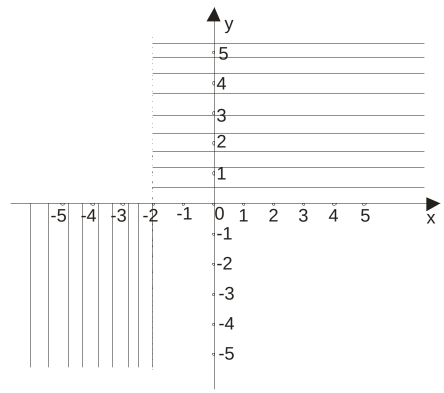
Posmatrajmo " sklopljeni" oblik funkcije $y = (x-1)^2(x+2)$

Odavde možemo zaključiti da je $(x-1)^2 \geq 0$ pa ne utiče na znak funkcije. Dakle znak zavisi samo od izraza x+2 :

y > 0 za x +2 >0 to jest za x > -2

y < 0 za x +2 <0 to jest za x < -2

Na grafiku bi to značilo :



Grafik se nalazi samo u ovim obeleženim oblastima.

Parnost i neparnost

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2$$

A ovo je $\neq$ f(x) i $\neq$ -f(x)

Dakle funkcija nije ni parna ni neparna pa ne postoji simetričnost grafika ni u odnosu na y osu ni u odnosu na koordinatni početak.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$$y = x^3 - 3x + 2$$
$$y` = 3x^2 - 3$$
$$y` = 0$$
$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

<u>Za x = -1</u>

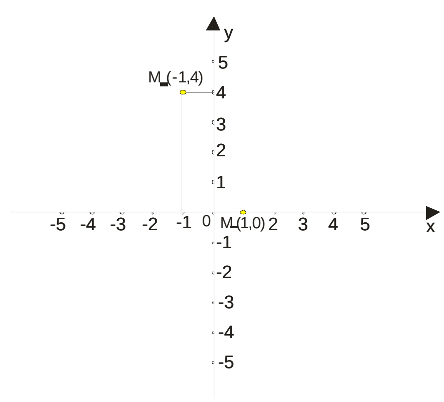
$$y = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

Dobili smo tačku $M_1(-1,4)$

<u>Za x = 1</u>

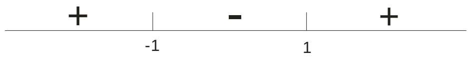
$$y = 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 0$$

Dobili smo tačku $M_2(1,0)$

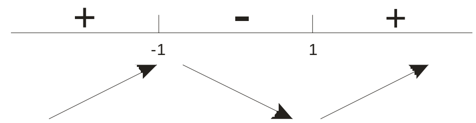


Za rašćenje i opadanje znamo da kada je y`>0 tu funkcija raste, a za y`<0 funkcija opada.

Kako je $y` = 3x^2 - 3$ upotrebićemo znanje iz II godine da kvadratni trinom ima znak broja *a* svuda osim izmedju nula...



pa je onda



Funkcija raste za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

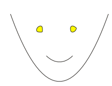
Funkcija opada za $x \in (-1, 1)$

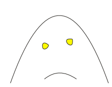
Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

Tražimo drugi izvod...

$y` = 3x^2 - 3$
$y`` = 6x$
$y`` = 0$
$6x = 0 \rightarrow x = 0$
Ovu vrednost menjamo u početnu funkciju
<u>za x = 0</u>
$y = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2$
$y = 2$
Dobili smo tačku prevoja $P(0, 2)$

Znamo da je za y``> 0 funkcija konveksna ( smeje se ) a za y``<0 konkavna (mršti se)

y``>0 za 6x > 0 , to jest x > 0 

y``<0 za 6x < 0 , to jest x < 0 

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>Vertikalna asimptota</u>

Ne postoji jer funkcija nema nigde prekid, odnosno definisana je svuda...

<u>Horizontalna asimptota</u>

$$\lim_{x \to \infty}(x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \to \infty}(x-1)^2(x+2) = \infty \cdot \infty = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty}(x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \to -\infty}(x-1)^2(x+2) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$
Dakle , nemamo horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota

$y = kx + n$

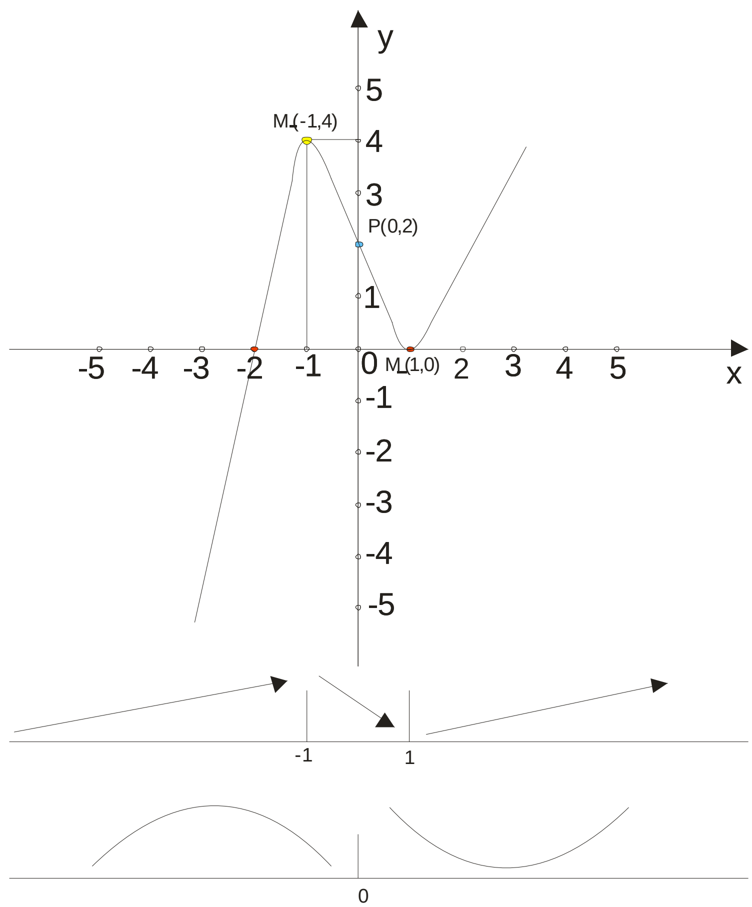
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \infty$$

Dakle, nema ni kose asimptote...

Skica grafika

Kao što smo videli svaka tačka u ispitivanju toka funkcije nam kaže po nešto o tome kako funkcija izgleda.

Da nacrtamo sada celu funkciju...



Predlažemo vam da za početak ispod grafika nanesete paralelno dve prave na kojima ćete najpre uneti rezultate za monotonost i konveksnost. To bi trebalo da pomogne...

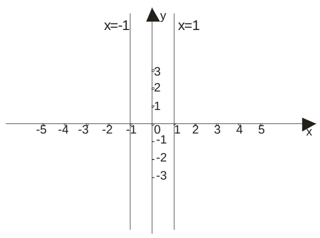
2. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y=\dfrac{x^2-4}{1-x^2}$

Oblast definisanosti (domen)

Funkcija je definisana za $1-x^2\neq 0$ to jest $(1-x)(1+x)\neq 0$ odnosno $x\neq 1$ i $x\neq -1$

Dakle $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

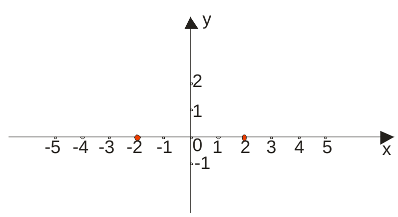
Ovo nam govori da funkcija ima prekide u x=-1 i x=1 (tu su nam asimptote)



Nule funkcije

y = 0 za $x^2-4=0\rightarrow(x-2)(x+2)=0\rightarrow x=2\vee x=-2$

Dakle, grafik seče x osu u dvema tačkama -2 i 2



Znak funkcije

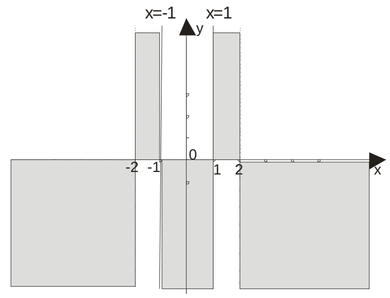
$y=\dfrac{x^2-4}{1-x^2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(1-x)(1+x)}$ Najbolje je koristiti tablicu…

	-∞ -2	-2 -1	-1 1	1 2	2 ∞
x-2	−	−	−	−	+
x+2	−	+	+	+	+
1-x	+	+	+	−	−
1+x	−	−	+	+	+
y	−	+	−	+	−

Šta nam tablica govori?

Ona nam kaže gde je grafik **iznad** x ose (gde su **plusevi**) i gde je **ispod** x ose (gde su **minusi**)

Na slici bi to izgledalo ovako:



Funkcija postoji samo u osenčenim delovima.

Parnost i neparnost

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{1-(-x)^2}=\frac{x^2-4}{1-x^2}=f(x)$$

Dakle , funkcija je parna, pa će grafik biti **simetričan u odnosu na y osu.**

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$$y=\frac{x^2-4}{1-x^2}$$

$$y`=\frac{(x^2-4)`(1-x^2)-(1-x^2)`(x^2-4)}{(1-x^2)^2}$$

$$y`=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(x^2-4)}{(1-x^2)^2}$$

$$y`=\frac{2x(1-x^2)+2x(x^2-4)}{(1-x^2)^2}$$ izvučemo 2x kao zajednički ispred zagrade...

$$y`=\frac{2x(1-x^2+x^2-4)}{(1-x^2)^2}$$

$$y`=\frac{-6x}{(1-x^2)^2}$$

y` = 0 za -6x = 0 , pa je x = 0 tačka ekstrema. Kad zamenimo x = 0 u početnu funkciju, dobijamo:

$$y=\frac{0^2-4}{1-0^2}=-4$$

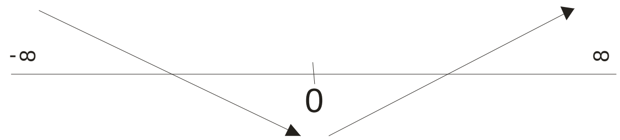
Dobili smo tačku ekstremne vrednosti **M(0,-4)**

Za monotonost nam treba znak prvog izvoda. Razmislimo malo...

Izraz u imeniocu je uvek pozitivan (zbog kvadrata) , tako da na znak prvog izvoda utiče samo izraz u brojiocu.

Dakle
$$y` > 0 \to -6x > 0 \to x < 0$$
$$y` < 0 \to -6x < 0 \to x > 0$$

Na skici to bi izgledalo :



Dobijena tačka M(0,-4) je dakle tačka minimuma.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y` = \frac{-6x}{(1-x^2)^2}$$

$$y`` = \frac{(-6x)`(1-x^2)^2 - ((1-x^2)^2)`(-6x)}{(1-x^2)^4}$$ pazi , izraz $((1-x^2)^2)`$ mora kao izvod složene funkcije...

$$y`` = \frac{-6(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(-6x)}{(1-x^2)^4}$$

$$y`` = \frac{-6(1-x^2)^2 - 24x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}$$ izvučemo $(1-x^2)$ ispred zagrade...

$$y`` = \frac{(1-x^2)[-6(1-x^2) - 24x^2]}{(1-x^2)^4}$$

$$y`` = \frac{-6+6x^2-24x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$y`` = \frac{-6-18x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$y`` = \frac{-6(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

y`` = 0 za $-6(3x^2+1) = 0$, a ovo nema racionalna rešenja, što nam govori da funkcija nema prevojnih tačaka.

Konveksnost i konkavnost ispitujemo iz znaka drugog izvoda. Razmislimo opet malo...

$3x^2 + 1 > 0$ pa on ne utiče na znak drugog izvoda .

Radićemo tablično, ali vodimo računa da u tablici mora biti i -6.

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … ∞
-6	−	−	−
1-x	+	+	−
1+x	−	+	+
y``	+	−	+

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>Vertikalna asimptota</u>

$$\lim_{x\to 1+\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{x\to 1+\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)}=\frac{1^2-4}{(1-(1+\varepsilon))(1+1+\varepsilon)}=\frac{-3}{(1-1-\varepsilon)2}=\frac{-3}{(-\varepsilon)2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1-\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{x\to 1-\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)}=\frac{1^2-4}{(1-(1-\varepsilon))(1+1-\varepsilon)}=\frac{-3}{(1-1+\varepsilon)2}=\frac{-3}{\varepsilon 2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1+\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{x\to -1+\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)}=\frac{(-1)^2-4}{(1-(-1+\varepsilon))(1+(-1+\varepsilon))}=\frac{-3}{(2-\varepsilon)\varepsilon}=\frac{-3}{2\varepsilon}=-\infty$$

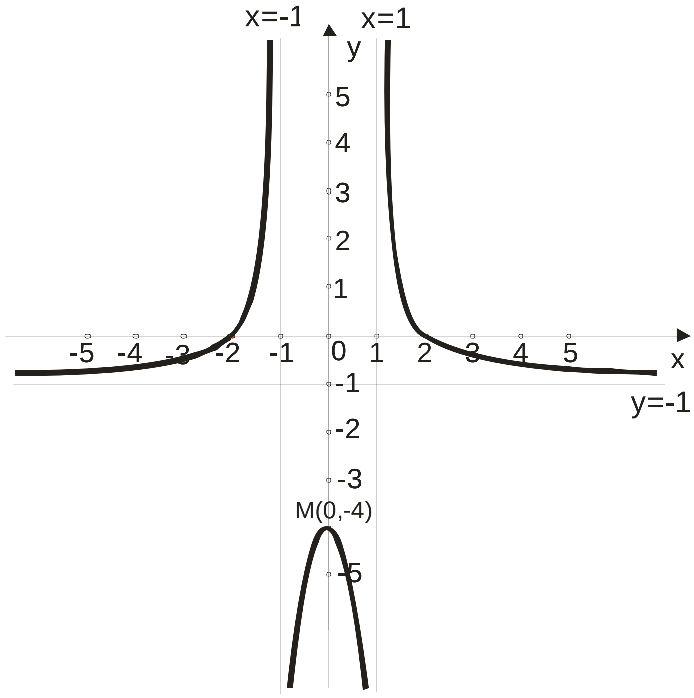
$$\lim_{x\to -1-\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{x\to -1-\varepsilon,\, kad\,\varepsilon\to 0}\frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)}=\frac{(-1)^2-4}{(1-(-1-\varepsilon))(1+(-1-\varepsilon))}=\frac{-3}{(2+\varepsilon)(-\varepsilon)}=\frac{-3}{2(-\varepsilon)}=+\infty$$

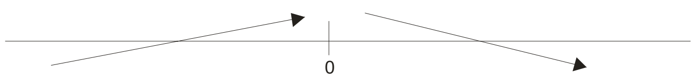
<u>Horizontalna asimptota</u>

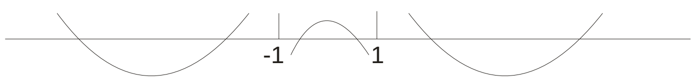
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{1-x^2}=-\frac{1}{1}=-1$ pa je <u>y = - 1 horizontalna asimptota</u>

Znači da , pošto ima horizontalna asimptota, kose asimptote nema.

Još da sklopimo konačan grafik:







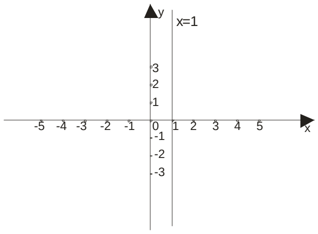
3. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

Oblast definisanosti (domen)

Funkcija je definisana za $x-1\neq 0$ odnosno $x\neq 1$

Dakle $x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

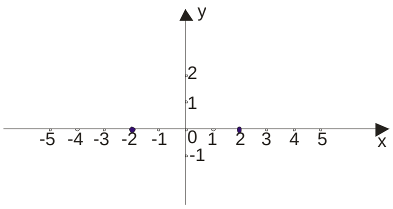
Znači , u x=1 je vertikalna asimptota



Nule funkcije

y = 0 za $x^2-4=0 \rightarrow (x-2)(x+2)=0 \rightarrow x=2 \vee x=-2$

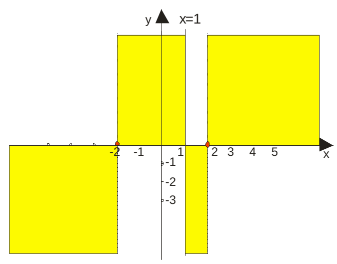
Dakle, grafik seče x osu u dvema tačkama x = -2 i x = 2



Znak funkcije

$$y=\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-1}$$

	-∞ … -2	-2 … 1	1 … 2	2 … ∞
x-2	−	−	−	+
x+2	−	+	+	+
x-1	−	−	+	+
y	−	+	−	+



Funkcija je u žuto osenčenim oblastima.

Parnost i neparnost

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{-x-1}=\frac{x^2-4}{-x-1}$$

Funkcija nije ni parna ni neparna.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$$y=\frac{x^2-4}{x-1}$$

$$y`=\frac{(x^2-4)`(x-1)-(x-1)`(x^2-4)}{(x-1)^2}$$

$$y`=\frac{2x(x-1)-1(x^2-4)}{(x-1)^2}$$

$$y`=\frac{2x^2-2x-1x^2+4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

$y` = 0$ za $x^2 - 2x + 4 = 0$

Kako je $x^2 - 2x + 4 > 0$ jer je $a > 0 \wedge D < 0$ (pogledaj fajl iz druge godine, kvadratna funkcija)

zaključujemo da funkcija **nema ekstremnih vednosti,** i da je **stalno rastuća. (** $y` > 0$ **)**

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y` = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

$$y`` = \frac{(x^2 - 2x + 4)`(x-1)^2 - ((x-1)^2)`(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4}$$

$$y`` = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4}$$ gore izvučemo x-1 ispred zagrade

$$y`` = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x + 4)]}{(x-1)^4}$$

$$y`` = \frac{[2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x - 8]}{(x-1)^3}$$

$$y`` = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

Zaključujemo da funkcija nema prevojnih tačaka, jer je $-6 \neq 0$.

Konveksnost i konkavnost ispitujemo :

	-∞ 1	1 ∞
-6	−	−
x-1	−	+
y``	+	−

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>Vertikalna asimptota</u>

$$\lim_{x \to 1+\varepsilon, kad \varepsilon \to 0} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \frac{1^2 - 4}{1 + \varepsilon - 1} = \frac{-3}{+\varepsilon} = \frac{-3}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-\varepsilon, kad \varepsilon \to 0} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \frac{1^2 - 4}{1 - \varepsilon - 1} = \frac{-3}{-\varepsilon} = \frac{-3}{-0} = +\infty$$

horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x-1}=\pm\infty$$ Ovo nam govori da nema horizontalne asimptote pa moramo tražiti kosu!

kosa asimptota:

Kosa asimptota je prava **y = kx + n**

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-4}{x-1}-1x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-4-x(x-1)}{x-1}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-4-x^2+x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x-4}{x-1}\right]=1$$

Sada k i n zamenimo u formulu: **y = kx + n** i dobijamo da je **y = x + 1** **kosa asimptota**