Sada, uočimo da

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

ne postoji [1] te stoga funkcija f nije derivabilna u $x_0=-1$.

Zadatak 4. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+2x-4$

(b) $f(x)=5\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}-3\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{5}$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{1}{2^5}$

(d) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}}$.

Rješenje.

(a) Primjenom pravila za deriviranje sume funkcija, dobivamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4-5x^3+3x^2+2x-4\right)' \\ &= \left(x^4\right)'-\left(5x^3\right)'+\left(3x^2\right)'+(2x)'-(4)' \\ &= 4x^3-5\left(3x^2\right)+3(2x)+2(1)-0 \\ &= 4x^3-15x^2+6x+2. \end{aligned}$$

(b) Napišemo prva tri izraza u obliku opće potencije pa imamo

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}},\quad \sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}.$$

Primjenom pravila za deriviranje sume i opće potencije, slijedi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-3\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{5}\right)' = 5\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+4\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'-3\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'+\left(\sqrt[3]{5}\right)' \\ &= 5\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-4\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}-3\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}+0=\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3x\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}. \end{aligned}$$

(c) Iz istog razloga, kao u prethodnom primjeru, napišemo sumande u obliku opće potencije i dobivamo

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2^5}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^{-1}\right)'+3\left(x^{-4}\right)'-\left(\frac{1}{2^5}\right)'$$

[1] Promatrajmo niz s općim članom $a_n=-1-\frac{1}{n}$, koji slijeva konvergira ka -1. Pri tome za odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(-1)}{a_n+1}=-1.$$

S druge strane promatramo li niz s općim članom $a_n=-1+\frac{1}{n}$, koji zdesna konvergira ka -1, za odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(-1)}{a_n+1}=1.$$

Prema definiciji limesa funkcije u točki zaključujemo da

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

ne postoji.

$$= \frac{-1}{2}\left(x^{-2}\right)+3(-4)\left(x^{-5}\right)+0=-\frac{1}{2x^2}-\frac{12}{x^5}.$$

(d) Analogno, napišemo dani izraz u obliku opće potencije

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}}=\sqrt{x}\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}}=\sqrt{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x^3}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{8}}=x^{\frac{9}{8}}.$$

Deriviranjem dobivamo

$$f'(x)=\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}}\right)'=\left(x^{\frac{9}{8}}\right)'=\frac{9}{8}x^{\frac{1}{8}}.$$

Zadatak 5. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x)=\log_4 x+3^x$

(b) $f(x)=2\sin x-3\cos x+\sin\pi$

(c) $f(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

Rješenje.

Primjenom pravila za deriviranje sume funkcija, te formula za deriviranje eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijskih funkcija dobivamo tražene derivacije.

(a)

$$f'(x)=\left(\log_4 x+3^x\right)'=\left(\log_4 x\right)'+\left(3^x\right)'=\frac{1}{x\ln 4}+3^x\ln 3=\frac{1}{2x\ln 2}+3^x\ln 3.$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\sin x-3\cos x+\sin\pi)'=2(\sin x)'-3(\cos x)'+(\sin\pi)' \\ &= 2\cos x-3(-\sin x)+0=2\cos x+3\sin x. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)'=(\operatorname{tg}x)'-(\operatorname{ctg}x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{-1}{\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Zadatak 6. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x)=\cos x\cdot\operatorname{ctg}x$

(b) $f(x)=\left(1-x^2\right)\log x$

(c) $f(x)=e^x\cdot\sin x+\cos x$.

Rješenje.

Koristimo pravilo za deriviranje produkta dvaju funkcija.

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x \cdot \operatorname{ctg} x)' = (\cos x)' \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot (\operatorname{ctg} x)' \\ &= -\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = -\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\cos x \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(1 - x^2\right) \log x\right]' = \left(1 - x^2\right)' \log x + \left(1 - x^2\right) (\log x)' \\ &= -2x \log x + \left(1 - x^2\right) \frac{1}{x \ln 10}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x \cdot \sin x + \cos x)' = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' + (\cos x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \sin x = (e^x - 1) \sin x + e^x \cos x. \end{aligned}$$

Zadatak 7. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1 - 3^x}{1 + 3^x}$.

Rješenje.

Koristimo pravilo za deriviranje kvocijenta dvaju funkcija.

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x+3}{x+4}\right)' = \frac{(2x+3)' \cdot (x+4) - (2x+3) \cdot (x+4)'}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (x+4) - (2x+3) \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{2x + 8 - 2x - 3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{1-x^2}\right)' = \frac{(\ln x)'\cdot(1-x^2) - \ln x\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{x}\cdot(1-x^2) - \ln x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\frac{1-x^2+2x^2\ \ln x}{x}}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{1-x^2+2x^2\ \ln x}{x(1-x^2)^2}.
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-3^x}{1+3^x}\right)' = \frac{(1-3^x)'\cdot(1+3^x) - (1-3^x)\cdot(1+3^x)'}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{(-3^x\ln 3)(1+3^x) - (1-3^x)(3^x\ln 3)}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{-3^x\ln 3 - 3^{2x}\ln 3 - 3^x\ln 3 + 3^{2x}\ln 3}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{-2\cdot 3^x\ln 3}{(1+3^x)^2}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 8. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = (x^2+5)^3$

(b) $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \log_3(x^2 - \sin x)$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

Rješenje.

Koristimo pravilo za deriviranje kompozicije funkcija.

(a) Označimo $h(x) = x^3$ i $g(x) = x^2 + 5$. Pravilo za derivaciju kompozicije funkcija glasi

$$f'(x) = [h(g(x))]' = h'(g(x))\cdot g'(x).$$

Kako je $h'(x) = 3x^2$ i $g'(x) = 2x$ imamo

$$f'(x) = h'(x^2+5)\cdot 2x = 3(x^2+5)^2\cdot 2x.$$

Stoga je

$$f'(x) = \left[(x^2+5)^3\right]' = 3(x^2+5)^2\cdot 2x = 6x(x^2+5).$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{x+2\sqrt{x}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \cdot (x+2\sqrt{x})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\log_3(x^2 - \sin x)\right]' = \frac{1}{(x^2-\sin x)\ln 3} \cdot (x^2 - \sin x)' \\ &= \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x)\ln 3}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}\right]' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= \frac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \left(\frac{1\cdot(1-x) + (1+x)\cdot 1}{(1-x)^2}\right) \\ &= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Logaritamsko deriviranje

Pretpostavimo da je zadana funkcija oblika $y(x) = f(x)^{g(x)}$. Derivaciju računamo na sljedeći način:

Logaritmiramo funkciju $y(x) = f(x)^{g(x)}$ i dobivamo

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Sada, deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Konačno, množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$y'(x) = y(x) \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$$

te konačno

$$y'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right).$$

ZADATAK 9. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x) = x^{\sin x}$.

Rješenje.

Logaritmiranjem funkcije $y(x) = x^{\sin x}$ slijedi

$$\begin{aligned} \ln y(x) &= \ln x^{\sin x} \\ \ln y(x) &= \sin x \cdot \ln x. \end{aligned}$$

Deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(x)} y'(x) &= (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)' \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right] \\ y'(x) &= x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right]. \end{aligned}$$

ZADATAK 10. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Rješenje.

Logaritmiranjem funkcije $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$ slijedi

$$\begin{aligned} \ln y(x) &= \ln(\sin x)^{\cos x} \\ \ln y(x) &= \cos x \cdot \ln(\sin x). \end{aligned}$$

Deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(x)} y'(x) &= (\cos x)' \ln(\sin x) + \cos x (\ln(\sin x))' \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right], \\ y'(x) &= (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]. \end{aligned}$$

DERIVACIJE VIŠEG REDA

Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \langle a, b \rangle$, onda funkciju $x \mapsto f'(x)$ definiranu na $\langle a, b \rangle$ označavamo s f' i nazivamo **prvom derivacijom funkcije f na** $\langle a, b \rangle$. Ona može ali i ne mora biti derivabilna funkcija na $\langle a, b \rangle$. Ako je prva derivacija f'